

# MODELOS BVAR: ESPECIFICACIÓN, ESTIMACIÓN E INFERENCIA

Autor: *Enrique M. Quilis*<sup>(1)</sup>

P. T. N.º 8/02

Marzo 2002

Instituto Nacional de Estadística. Paseo de la Castellana, 183. 28046–Madrid.  
emquilis@ine.es

(1) Agradezco las discusiones mantenidas con Carolina Arias, Rafael Frutos y Francisco Melis sobre modelización multivariante de series temporales así como la minuciosa revisión de Juan Bógalo. Las opiniones expresadas corresponden al autor y no reflejan necesariamente las del INE.

N.B.: Las opiniones expresadas en este trabajo son de la exclusiva responsabilidad del autor, pudiendo no coincidir con las del Instituto de Estudios Fiscales.

Desde el año 1998, la colección de Papeles de Trabajo del Instituto de Estudios Fiscales está disponible en versión electrónica, en la dirección: ><http://www.minhac.es/ief/principal.htm>.

Edita: Instituto de Estudios Fiscales

N.I.P.O.: 111-02-004-2

I.S.S.N.: 1578-0252

Depósito Legal: M-23772-2001

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN
  2. A MODO DE PRESENTACIÓN: REGRESIÓN CRESTA Y ESTIMACIÓN MIXTA
    - 2.1. Regresión cresta
    - 2.2. Estimación mixta
  3. ESTRUCTURA VAR BÁSICA. ESPECIFICACIÓN
  4. RESTRICCIONES BAYESIANAS. ESTIMACIÓN
  5. EXTENSIÓN AL CASO ESTACIONAL
  6. CALIBRADO
  7. MODELOS BVAR Y VARMA
  8. INFERENCIA
  9. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES
- APÉNDICE A: RECURSOS EN INTERNET
- REFERENCIAS



## RESUMEN

En este trabajo se analiza, en primer lugar, la especificación bayesiana de los vectores de autorregresiones (BVAR), tomando como punto de partida los modelos VAR no restringidos y las técnicas de estimación contraída. A continuación, se detalla su estimación como un caso especial del método de estimación mixta de Theil. El texto toma como hilo conductor la especificación *a priori* propuesta por Litterman así como su extensión al caso estacional elaborada por Raynaud y Simonato. Esta última abre interesantes perspectivas para el uso de estos modelos en el análisis de la coyuntura económica. El trabajo también examina la determinación de los hiperparámetros que controlan la especificación *a priori* (calibrado) junto con la relación existente entre los modelos BVAR y los VARMA. Finalmente, se expone el uso inferencial de los modelos BVAR para el análisis de cointegración.

**Palabras clave:** Modelos BVAR, VAR y VARMA, análisis bayesiano, estacionalidad, cointegración.

**Códigos JEL:** C110, C320, C500.



## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis macroeconómico cuantitativo desde la II Guerra Mundial ha estado estrechamente vinculado con los modelos econométricos multiecuacionales. El desarrollo de estos modelos durante las tres décadas siguientes fue extraordinario, tanto por su extensión teórica como por su tamaño. De esta manera, llegaron a existir modelos de cientos, e incluso miles, de ecuaciones que proporcionaban predicciones, análisis de políticas económicas y simulaciones sobre casi cualquier aspecto de una economía, con una base anual o trimestral.

Estos grandes sistemas multiecuacionales han caído en desuso como herramientas de investigación científica de forma casi completa, Gordon (1993). Su virtual desaparición se debe a la concurrencia de tres procesos. En primer lugar, a la demoledora crítica que los economistas asociados a la Nueva Macroeconomía Clásica realizaron respecto a la forma de identificar estos modelos y a su uso como herramientas de evaluación cuantitativa de políticas económicas (Lucas, 1976; Prescott, 1977; Lucas y Sargent, 1979). En segundo lugar, a la extensión de la metodología Box-Jenkins de análisis univariante de series temporales que, al posibilitar la predicción económica de forma sencilla, eficaz y relativamente precisa, disminuyó el valor de los modelos econométricos en este ámbito. Finalmente, los desarrollos en el campo del análisis de series múltiples y, en especial, la popularización de los modelos autorregresivos vectoriales (VAR) como herramientas de análisis y previsión, han completado la labor de acoso y derribo efectuada por los otros dos fenómenos.

El último desarrollo ha dado lugar a un enfoque econométrico denominado "Macroeconomía Empírica". Dicho enfoque considera que hay que separar tajantemente la incertidumbre ligada al proceso de especificación estadística de la que está asociada a la inferencia sustentada por la Teoría Económica. Para ello se propone utilizar como punto de partida modelos en forma reducida que incorporan muy pocas restricciones *a priori* y cuya configuración está dictada por consideraciones puramente estadísticas. Estos modelos, poco controvertidos, permiten un análisis estructural guiado por la Teoría Económica, que sí es discutible. El trabajo de Sims (1980) constituye el punto de partida de esta corriente de análisis, cuya difusión ha sido extraordinaria.

En este trabajo se examinan las propiedades de los modelos VAR así como la mejora de los mismos mediante la incorporación de información extramuestral, extensión que se conoce como modelos VAR bayesianos (BVAR). Los modelos BVAR fueron desarrollados inicialmente en la Universidad de Minnesota y en el Banco de la Reserva Federal de Minneapolis, resultado de una afortunada combinación de estudios teóricos y necesidades prácticas, estas últimas vinculadas con la realización de predicciones y de análisis de políticas económicas alternati-



vas<sup>1</sup>. Naturalmente, razones de espacio y de presentación del material aconsejan centrar el estudio en los BVAR como formas reducidas útiles para la predicción y el control y dejar para otro trabajo su conversión en forma estructural y su empleo como herramienta de análisis cuantitativo de políticas económicas.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la segunda sección se presentan dos técnicas econométricas (la regresión cresta y la estimación mixta) que sirven de base para una adecuada comprensión de la aportación bayesiana al enfoque VAR básico. A continuación, se examinan las propiedades principales de los modelos VAR así como los criterios para la determinación de su orden. El cuarto apartado expone las restricciones bayesianas junto con los procedimientos de estimación. La aplicación de los modelos BVAR a series estacionales se discute en la sección quinta y, en la sexta, cómo determinar los hiperparámetros que controlan la información extramuestral incorporada, proceso que se conoce como calibrado. En el séptimo apartado se expone la relación entre los modelos BVAR y los VARMA (vectores de autorregresiones y medias móviles) y, en el octavo, cómo realizar determinados ejercicios inferenciales (análisis de cointegración) mediante estos modelos. La novena sección expone las principales conclusiones y futuras líneas de desarrollo. Finalmente, algunos recursos disponibles en Internet son mencionados en un apéndice.

## 2. A MODO DE PRESENTACION: REGRESION CRESTA Y ESTIMACION MIXTA

Incluso en sistemas de dimensión moderada la estimación de modelos VAR está afectada por una auténtica 'maldición de la dimensionalidad', de forma que sus parámetros están estimados de manera poco precisa, sus predicciones son de baja calidad y, en general, la inferencia basada en dichos modelos es cuestionable.

La solución empleada en los modelos BVAR (la incorporación de información *a priori* acerca de los parámetros del modelo) es una aplicación especial y bastante sofisticada de dos métodos de estimación desarrollados a principios de los años setenta: la regresión cresta (*ridge regression*) y la estimación mixta. Ambos métodos están orientados a la mejora de la calidad de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de los parámetros del modelo lineal general.

De forma simplificada, la regresión cresta trata de incrementar la precisión de los estimadores mientras que la estimación mixta permite la inclusión de información *a priori* de naturaleza inexacta en el proceso de estimación. Ambos

---

<sup>1</sup> En Velde (1990) y Clement (2000) se describe el entorno de trabajo que dio lugar, entre otras cosas, a los modelos BVAR.



métodos admiten de manera bastante directa una interpretación bayesiana y deben ser considerados como manifestaciones diferentes de un mismo procedimiento de restricción de la estimación MCO.

Desde la perspectiva de los BVAR, la regresión cresta equivale a la motivación (cómo mejorar el rendimiento estadístico de los estimadores MCO en un contexto VAR) y la estimación mixta refleja la instrumentación concreta (la incorporación explícita y multidimensional de la información *a priori* que conduce a dicha mejora). A continuación se presenta de forma sucinta ambas técnicas. En Hoerl y Kennard (1970), Judge *et al.* (1980) y Peña (1987) se encuentra una exposición de la regresión cresta y en Theil (1970) y Judge *et al.* (1980) se analiza en detalle la estimación mixta.

## 2.1. Regresión cresta

Sea el modelo lineal general:

$$Y = X\beta + U \quad [2.1]$$

donde  $Y$  es un vector de  $n$  observaciones sobre la variable de respuesta,  $X$  es la matriz de diseño de dimensión  $n \times k$ ,  $\beta$  es un vector de  $k$  parámetros y  $U$  es un vector de perturbaciones aleatorias. Se asume que el modelo [2.1] verifica las siguientes condiciones ideales (Schmidt, 1976):

- $X$  es de rango completo,
- no existen regresores omitidos,
- $\beta$  es un vector de parámetros constantes aunque desconocidos,
- las perturbaciones son de media nula, homocedásticas y de varianza escalar:  $E(U) = 0$  y  $E(UU') = \sigma^2 I_n$ .

El estimador mínimo cuadrático ordinario (MCO) de  $\beta$  es:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \quad [2.2]$$

Si los regresores son altamente colineales, la matriz  $X'X$  estará mal condicionada, generando autovalores mínimos virtualmente nulos. En consecuencia, los estimadores MCO expresados en [2.2] se caracterizarán por sus elevadas varianzas, por la correlación entre sus componentes (lo que conduce a la dificultad para establecer el impacto de efectos individuales) y, frecuentemente, por la falta de plausibilidad de los mismos, en el sentido de ser demasiado grandes o de aparecer con el signo "incorrecto".

Una de las soluciones al problema de la multicolinealidad consiste en emplear una clase de estimadores menos sensibles a la elevada correlación entre los regresores. Este tipo de métodos se denominan 'estimadores contraídos', ya que tratan de reducir el tamaño del estimador de  $\beta$ . Posiblemente el procedimiento más co-



nocido es el de los estimadores cresta (*ridge*). Como se examinará más adelante, todos estos métodos tratan de corregir las consecuencias adversas de la falta de identificación de la matriz de diseño  $X$ , introduciendo información adicional bajo la forma de restricciones que se imponen al proceso de estimación.

Los estimadores cresta pueden derivarse como la solución de un programa de mínimos cuadrados condicionados, representando la restricción un límite superior al tamaño de la suma de cuadrados de  $\beta$ . Formalmente:

$$\underset{\beta}{\text{MIN}} \quad S(\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad \text{s.a.} \quad \beta'\beta \leq C^2 \quad [2.3]$$

El operador lagrangiano asociado al programa [2.3] es:

$$\ell(\beta, \lambda) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + \lambda(\beta'\beta - C^2) \quad [2.4]$$

Las condiciones de primer orden y la solución correspondiente son:

$$\left. \begin{array}{l} \partial \ell(\bullet) / \partial \beta = 0 \\ \partial \ell(\bullet) / \partial \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\beta}(\lambda) = (X'X + \lambda I_k)^{-1}(X'Y) \\ \hat{\beta}(\lambda)' \hat{\beta}(\lambda) = C^2 \end{array} \right. \quad [2.5]$$

Resolviendo  $\lambda$  en función de  $C$  se obtiene el estimador cresta:

$$\hat{\beta}(\lambda(C)) = (X'X + \lambda(C)I_k)^{-1}(X'Y) \quad [2.6]$$

La elección de  $\lambda$  depende del tamaño  $C$  de la hiperesfera: si  $C = \infty$  la restricción no será vinculante ( $\lambda = 0$ ), por lo que el estimador cresta [2.6] coincide con el MCO [2.2]. Por el contrario, si  $C = 0$  la restricción equivale a eliminar la función objetivo en el operador lagrangiano ( $\lambda = \infty$ ), con lo que  $\hat{\beta}(\lambda(C)) = 0$ .

En consecuencia, el estimador cresta depende de la selección *a priori* de un hiperparámetro  $C$  que determina el tamaño (en módulo) de los estimadores de  $\beta$ . Esto conduce de forma natural a una interpretación bayesiana. En efecto, desde esta perspectiva, la restricción incorporada en el programa [2.3] refleja un determinado prior acerca de los parámetros  $\beta$ , en particular sobre su tamaño. Concretamente, esta información de naturaleza extramuestral implica que los valores pequeños de  $\beta$  (en módulo) son más verosímiles que los grandes. La confianza que el analista deposita en esta creencia es cuantificada a través del parámetro  $\lambda$ . Así, si  $\lambda \rightarrow \infty$  el analista confía de forma plena en las restricciones, ignorando por lo tanto la información muestral y obteniendo  $\hat{\beta}(\lambda(C)) = 0$ . Por el contrario, si  $\lambda \rightarrow 0$  el analista desconfía del prior y se guiará sólo por la información muestral, vinculada en este caso con el estimador MCO.

Naturalmente, la elección adecuada del hiperparámetro  $\lambda$  es crítica para una aplicación satisfactoria de la estimación cresta. No existe un criterio infalible o automático para realizar esta selección. Hoerl y Kennard (1970) recomiendan basar la selección de  $\lambda$  en los siguientes criterios:

- que genere estimadores estables, en el sentido de que pequeños cambios en  $\lambda$  no den lugar a abruptas variaciones en los valores estimados,
- que los valores absolutos sean de un tamaño razonable,
- que el signo sea el correcto y
- que el error cuadrático medio no esté inflado.

Este último punto es bastante importante porque, como se deduce de [2.6] y de las condiciones ideales asumidas, el estimador cresta es sesgado, de manera que su ventaja frente al MCO ha de sustentarse en una varianza significativamente inferior y, a ser posible, también en un sesgo contenido.

## 2.2. Estimación mixta

Los estimadores cresta equivalen a restringir *a priori* el tamaño del estimador de  $\beta$  de manera "anónima", ya que no se tratan de forma individual los elementos de dicho vector. El método de estimación mixta también considera que  $\beta$  ha de estar, con mayor verosimilitud, en una determinada región del espacio paramétrico pero considerando sus componentes de forma diferenciada y sopesando probabilísticamente esta información *a priori*.

Se asumen las mismas hipótesis ideales expuestas al comienzo de esta sección y, adicionalmente, que el vector de parámetros  $\beta$  satisface un conjunto de restricciones lineales de forma inexacta. La incertidumbre acerca de dichas restricciones se representa mediante la inclusión de un vector de perturbaciones  $w$  a las  $m$  restricciones de la forma  $r = R\beta$ :

$$r = R\beta + w \quad [2.7]$$

A su vez, se considera que el vector  $w$  obedece a una distribución normal de la forma:

$$w \sim N(0, Q) \quad [2.8]$$

El modelo completo que surge de la combinación de [2.1] y de [2.7] es:

$$\begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} U \\ w \end{bmatrix} \quad [2.9]$$

La matriz de varianzas y covarianzas del modelo ampliado [2.9] no es escalar:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad [2.10]$$

lo que requiere que la estimación de  $\beta$  se haga por mínimos cuadrados generalizados:

$$\hat{\beta} = \left[ \begin{bmatrix} X' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[ \begin{bmatrix} X' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} \right] \quad [2.11]$$



lo que conduce a:

$$\hat{\beta} = (\sigma^{-2}X'X + R'Q^{-1}R)^{-1}(\sigma^{-2}X'Y + R'Q^{-1}r) \quad [2.12]$$

La interpretación de [2.12] es inmediata: si el analista considera que las restricciones son fiables hará que la matriz de varianzas y covarianzas  $Q$  sea reducida, por lo que el estimador de  $\beta$  estará determinado, principalmente, por las restricciones  $r = R\beta$ . Por el contrario, si la confianza depositada en las restricciones es baja,  $Q$  será elevada y el estimador mixto de  $\beta$  será muy similar al MCO, es decir, prácticamente como si la información extramuestral no hubiera sido considerada.

Como se examinará más adelante, las expresiones [2.6] y [2.12] constituyen la base del proceso de estimación de los modelos BVAR.

### 3. ESTRUCTURA VAR BASICA. ESPECIFICACION

En esta sección se exponen las principales características de los modelos VAR, con el objeto de analizar su estructura y diseñar procedimientos de especificación empírica. Referencias adicionales se encuentran en Tiao *et al.* (1979), Sargent (1979), Sims (1980), Tiao y Box (1981), Liu (1986), Lütkepohl (1991), Reinsel (1993), Espasa y Cancelo (1993) y Enders (1995), entre otros.

Sea  $Z_t = (z_1, z_2, \dots, z_k)'_t$  un vector de observaciones efectuadas sobre  $k$  variables en el período  $t$ , con  $t = 1..n$ . Se considera que  $Z_t$  evoluciona según un modelo vectorial autorregresivo (VAR) de orden  $p$  si puede ser expresado de la siguiente forma:

$$Z_t = \mu + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + U_t \quad [3.1]$$

donde  $\mu$  es un vector de  $k$  constantes y  $\Phi_h$  es una matriz de dimensión  $k \times k$ . El término  $U_t$  representa una secuencia vectorial de perturbaciones estocásticas de esperanza nula, serialmente incorrelacionadas y con matriz de varianzas y covarianzas constante. Se asume que la función de distribución de probabilidades que genera a  $U_t$  es normal multivariante:

$$U_t : k \times 1 \sim N(0, \Sigma) \quad [3.2]$$

En general, se admite que  $\Sigma$  no es una matriz diagonal, es decir, que existen interacciones contemporáneas entre las  $k$  innovaciones.

Según esta representación, cada variable  $z_{it}$  en un VAR es generada a partir de la suma algebraica de tres elementos:

- valores desfasados de la propia variable (dinámica propia):

$$\sum_{h=1}^p \phi_{h,i,i} z_{i,t-h}$$

- valores desfasados de las restantes variables (dinámica cruzada):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \sum_{h=1}^p \phi_{h,i,j} z_{j,t-h}$$

- una innovación específica, posiblemente correlacionada de forma contemporánea con las de las demás variables (innovación):

$$u_{it}$$

Los modelos VAR son estructuras muy generales y, dependiendo de la naturaleza de las matrices  $\Phi_h$  y  $\Sigma$ , aparecen diversos casos particulares. La siguiente tabla ilustra estas posibilidades:

**Tabla 1**  
**CASOS PARTICULARES DE UN VAR**  
**( $\Phi$  DESIGNA A TODAS LAS MATRICES  $\Phi_h$ )**

		$\Sigma$	
		Completa	Diagonal
$\Phi$	Completa	VAR general	VAR sin interacciones contemporáneas
	Triangular	Sistema de funciones de transferencia	Funciones de transferencia independientes
	Diagonal	Ecuaciones de regresión dinámicas aparentemente no relacionadas	Modelos AR(p) independientes

Con el fin de apreciar mejor la dinámica asociada a un modelo VAR se va a considerar su expresión más sencilla:  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\mu = 0$ :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_t \quad [3.3]$$

Resolviendo [3.3] de forma iterada, a partir de unas condiciones iniciales  $Z_m$ , se obtiene:

$$Z_t = \Phi^{t-m} Z_m + \sum_{h=0}^{t-m} \Phi^h U_{t-h} \quad [3.4]$$

El primer sumando de [3.4] representa la dependencia de  $Z_t$  con respecto a las condiciones iniciales y, el segundo, la acumulación dinámica de los *shocks* recibidos desde el período inicial  $m$ . Este segundo elemento equivale a una media móvil vectorial (VMA) de orden infinito cuyas matrices están sujetas a la restricción no lineal:

$$\Theta_h = \Phi^h \quad [3.5]$$

La mejor forma de examinar [3.4] consiste en sustituir  $\Phi$  por su representación en forma canónica de Jordan:

$$\Phi = P\Lambda P^{-1} \quad [3.6]$$

donde  $\Lambda$  es la matriz de autovalores de  $\Phi$ , teniendo en cuenta su posible multiplicidad, y  $P$  es una matriz cuyas columnas son los autovectores asociados. Sustituyendo [3.6] en [3.4]:

$$Z_t = P\Lambda^{t-m}P^{-1}Z_m + \sum_{h=0}^{t-m} P\Lambda^h P^{-1}U_{t-h} \quad [3.7]$$

En consecuencia, según se desprende de [3.7], tanto la dependencia como la dinámica de  $Z_t$  están determinadas por la estructura de autovalores de  $\Phi$ . Así, por ejemplo, si son mayores en módulo que uno se apreciará una dependencia ilimitada en el tiempo con respecto al estado inicial  $Z_m$  así como una pauta explosiva de respuesta a los impulsos  $U_t$  que han incidido sobre el sistema. Combinando los módulos de los autovalores con su carácter real o complejo, se aprecian las múltiples posibilidades que ofrecen los modelos VAR:

**Tabla 2**  
DINÁMICA DE UN VAR(1) BIVARIANTE  
( $\lambda$  DESIGNA A TODOS LOS AUTOVALORES  $\lambda_{t+1}$ )

		$\lambda$	
		$ \lambda  < 1$	$1$
$\lambda$	Real	Estable	Explosivo
		Monótono	Monótono
	Complejo	Estable	Explosivo
		Oscilatorio	Oscilatorio

Asimismo, los modelos VAR permiten el tratamiento de interacciones dinámicas muy diversas, como se expone a continuación. Si se premultiplica el modelo VAR(1) expresado en [3.3] por  $P^{-1}$  se obtiene su representación factorial desacoplada:

$$F_t = \Lambda F_{t-1} + V_t \quad [3.8]$$

$$Z_t = PF_t$$

Especialmente interesante es el caso de dos autovalores reales y distintos:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_t \quad [3.9]$$

Los factores subyacentes evolucionan según procesos AR(1) desacoplados, dando lugar a alguna de las situaciones contempladas en la siguiente tabla:

**Tabla 3**  
**ESTRUCTURA FACTORIAL DESACOPLADA**  
**VAR(1) BIVARIANTE**

		$\lambda_1$	
		$ \lambda_1  < 1$	1
$\lambda_2$	$ \lambda_2  < 1$	Estacionariedad	No estacionariedad Cointegración
	1	No estacionariedad Cointegración	No estacionariedad No cointegración

El análisis anterior puede ser fácilmente extendido al caso general  $p > 1$  mediante la representación de un modelo VAR(p) en el espacio de los estados. Para ello se define una ecuación dinámica (llamada 'de transición') que sintetiza la evolución del sistema. Su expresión es:

$$\begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t-1} \\ \dots \\ Z_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1} \\ Z_{t-2} \\ \dots \\ Z_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [3.10]$$

Definiendo apropiadamente las matrices y vectores de [3.10] se tiene:

$$Y_t = \Gamma Y_{t-1} + E_t \quad [3.11]$$

En la ecuación anterior  $Y_t$  representa el vector de estado, que puede ser definido como la proyección de mínima dimensión del vector de futuro  $Z^+ = \{Z_{t+h} : h = 1.. \infty\}$  en el de pasado  $Z^- = \{Z_{t-h} : h = 0.. \infty\}$ , necesaria para predecir el primero en función del segundo. La representación en el espacio de los estados se completa mediante una ecuación estática (llamada 'de medida') que recoge la dependencia del vector observado respecto al de estado:

$$Z_t = H Y_t = [I \ 0 \ \dots \ 0] Y_t \quad [3.12]$$

De esta manera, un modelo VAR(p) de dimensión  $k$  ha sido expresado como un VAR(1) de dimensión  $k \times p$ , pudiendo aplicarse el análisis de autovalores antes expuesto. Asimismo, debe señalarse que la representación en el espacio de los

estados es especialmente útil para la estimación de esta clase de modelos mediante el filtro de Kalman (Harvey, 1989), para el cálculo de las funciones de impulso-respuesta y para la predicción, entre otras muchas aplicaciones.

Hasta este momento se ha asumido que el orden  $p$  del modelo es un parámetro conocido. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas éste ha de ser determinado a través de la propia información muestral. Esta tarea de especificación puede ser realizada mediante la identificación de pautas en determinados estadísticos muestrales, utilizando contrastes de hipótesis o a través de criterios de información, véase Choi (1992) para una exposición completa de todos ellos. A continuación se comentan los dos últimos ya que son los más utilizados en las aplicaciones de los modelos VAR.

Los contrastes de hipótesis giran en torno al uso secuencial del estadístico de la razón de verosimilitudes:

$$\mathfrak{R}(m) = -(n - 0.5 - km) \ln\left(\frac{|\hat{U}(m)\hat{U}(m)'|}{|\hat{U}(m-1)\hat{U}(m-1)'|}\right) \quad [3.13]$$

Dicho contraste compara el ajuste muestral de un VAR( $m$ ) frente al de un VAR( $m-1$ ) y permite decidir si la hipótesis nula  $\Phi_m = 0$  no es rechazada por la muestra. Bajo dicha hipótesis el estadístico  $\mathfrak{R}$  se distribuye como una  $\chi^2$  con  $k^2$  grados de libertad.

El principal problema de este contraste radica en el deterioro de los niveles de significación cuando es utilizado de manera secuencial, por lo que los criterios de información han ido ganando difusión como herramienta de especificación de los VAR. Los más conocidos son el de Akaike, llamado AIC (*Akaike Information Criterion*), y el de Schwarz, denominado BIC (*Bayesian Information Criterion*), véase Choi (1992) o Tsay (2000) para una derivación analítica de los mismos. Sus expresiones respectivas son:

$$AIC(m) = \frac{2}{n} mk^2 + \ln(|\hat{U}(m)\hat{U}(m)'|) \quad [3.14]$$

y

$$BIC(m) = \frac{\ln(n)}{n} mk^2 + \ln(|\hat{U}(m)\hat{U}(m)'|) \quad [3.15]$$

La ventaja del BIC frente al AIC radica en su consistencia, bajo la hipótesis de que existe un verdadero proceso generador de los datos. No obstante, su rendimiento en muestras finitas no es necesariamente superior al AIC, véase Lütkepohl (1991) y Deniau *et al.* (1992) para una discusión detallada de estos criterios.

Por último, debe señalarse que la aplicación de consideraciones bayesianas en un modelo VAR suelen ir acompañadas de una elección relativamente generosa del orden  $p$ , especialmente si las series poseen estructura estacional. Como señala Todd (1988):



*La teoría estadística bayesiana sugiere una aproximación diferente: incluir tantos vínculos –por lo tanto, coeficientes– como el ordenador pueda manejar y entonces usar el discernimiento humano para superar el problema de la falta de grados de libertad, mediante la especificación de un conjunto de hipótesis a priori que suplementen los datos.*

#### 4. RESTRICCIONES BAYESIANAS. ESTIMACION

Los modelos VAR son representaciones poco parsimoniosas de la estructura dinámica de un vector de series temporales de forma que, incluso en sistemas de dimensión moderada, el número de parámetros que han de ser estimados es muy elevado, agotando eventualmente los grados de libertad de los estimadores. Este hecho, acompañado por la elevada correlación que suelen presentar los regresores de un VAR, da lugar a dos consecuencias funestas: multicolinealidad y sobreajuste. La primera genera estimaciones imprecisas e inestables, como ya se ha comentado al exponer la regresión cresta. De esta manera, el uso de los VAR como herramienta de análisis estructural mediante, por ejemplo, las funciones de respuesta a los impulsos es cuestionable. Los efectos del sobreajuste son más sutiles<sup>2</sup> pero igualmente adversos. El agotamiento de los grados de libertad lleva a una situación en la que cada punto está “explicado” por un parámetro como mínimo, de manera que el modelo es incapaz de discriminar adecuadamente los elementos sistemáticos y los puramente accidentales que subyacen en las observaciones. Así, el proceso predictivo será erróneo con frecuencia y las previsiones se revisarán frecuente y ampliamente, con la consiguiente pérdida de confianza en las mismas.

Con el fin de resolver estos problemas se han propuesto diversas soluciones en línea con los métodos de regresión cresta y de estimación mixta presentados en la segunda sección. Así, Litterman (1984a, 1984b, 1986), Doan *et al.* (1984) y Todd (1984, 1988) proponen imponer una serie de restricciones de naturaleza probabilística orientadas a mejorar la calidad de la estimación y de las predicciones. Estas restricciones, susceptibles de una interpretación bayesiana, no reflejan principios derivados de la teoría económica (usualmente controvertidos) sino consideraciones instrumentales, atóricas, asociadas con nociones de tipo puramente estadístico. Debido al origen geográfico de este enfoque, este tipo de información extramuestral se denomina ‘prior de Minnesota’.

A continuación se expone dicho prior, para lo que resulta conveniente modificar la notación empleada en la sección anterior. La ecuación *i*-ésima de un modelo VAR(*p*) es:

---

<sup>2</sup> De hecho, el ajuste muestral suele ser en estos casos muy bueno.

$$Z_i = \begin{pmatrix} i_{n-p} & Z_{1(1)} & \cdots & Z_{k(1)} & \cdots & Z_{1(p)} & \cdots & Z_{k(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \phi_{i,1,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,1,p} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,p} \end{pmatrix} + U_i = x\beta_i + U_i \quad [4.1]$$

siendo  $Z_{j(h)}$  el vector de  $(n-p)$  observaciones de la serie  $j$  retardada  $h$  períodos. Nótese que el vector de regresores  $x$  es el mismo en todas las ecuaciones, por lo que la consideración simultánea de las  $k$  ecuaciones que integran el VAR da lugar a la siguiente expresión:

$$Z = (I_k \otimes x)\beta + U = X\beta + U \quad [4.2]$$

siendo  $\otimes$  el producto tensorial de Kronecker y estando  $x$  y  $\beta$  definidos como:

$$x = \begin{pmatrix} i_{n-p} & Z_{1(1)} & \cdots & Z_{k(1)} & \cdots & Z_{1(p)} & \cdots & Z_{k(p)} \end{pmatrix}$$

y

$$\beta = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_k)'$$

Naturalmente, el vector  $\beta$  está relacionado con las matrices  $\Phi$  según:

$$\beta = \text{vec}(\Phi') \quad \text{con} \quad \Phi = (\mu \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_p) \quad [4.3]$$

En consecuencia, la matriz de varianzas y covarianzas de  $U$  es:

$$\Sigma_U = \Sigma \otimes I_{n-p} \quad \text{con} \quad \Sigma = \{\sigma_{i,j} \quad i, j = 1..k\} \quad [4.4]$$

El modelo [4.2] tiene un aspecto similar al del modelo lineal general presentado en la segunda sección, con las debidas consideraciones respecto a la dimensión y estructura de los regresores.

La especificación bayesiana de un modelo VAR considera que los parámetros que forman el vector  $\beta$  son variables aleatorias caracterizadas por una distribución de probabilidad normal multivariante:

$$\beta \sim N(\beta^*, V_\beta) \quad [4.5]$$

En particular, los principios básicos que articulan al prior de Minnesota son:

- la dinámica propia es más importante que la cruzada,
- la influencia disminuye a medida que aumenta la distancia temporal,
- las series individuales no son estacionarias y
- no existe cointegración.

La especificación del vector de medias  $\beta^*$  toma como punto de referencia que todas las variables del sistema evolucionan de acuerdo con un paseo aleatorio con deriva:

$$z_{i,t} = \mu_i + z_{i,t-1} + u_{it} \quad \forall i \quad [4.6]$$

Una expresión alternativa de [4.6] es:

$$(1 - B)z_{i,t} = \mu_i + u_{it} \quad \forall i \quad [4.7]$$

En consecuencia, se asume que todas las series poseen una tendencia mixta con un componente estocástico asociado a la raíz unitaria en la frecuencia cero  $(1-B)$  y con otro determinista vinculado con el término constante  $\mu_i$ . Obsérvese que, al existir  $k$  raíces unitarias en la representación *a priori* del VAR la posibilidad de cointegración entre la series no es explícitamente considerada. Teniendo en cuenta todos los parámetros involucrados, se tiene:

$$\beta^* = \begin{cases} \mu_i = 0 & \forall i \\ \phi_{i,j,h} = \begin{cases} 1 & i = j \quad h = 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \end{cases} \quad [4.8]$$

Expresando [4.8] en forma matricial:

$$\Phi_h = \begin{cases} I_k & h = 1 \\ 0 & h > 1 \end{cases} \quad [4.9]$$

Así, en el caso  $k=2$  y  $p=2$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{t-2} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_t \quad [4.10]$$

De esta manera el vector de medias será:

$$\beta^* = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)' \quad [4.11]$$

La matriz de varianzas y covarianzas de  $\beta$  se asume diagonal, y está gobernada por un vector de hiperparámetros  $\pi$  que describe de forma parsimoniosa las propiedades de dicha matriz.

$$\text{diagona}(V_\beta) = \begin{cases} v(\mu_i) = \infty & \forall i \\ v(\phi_{i,j,h}) = (\pi_1 F_{i,j} g_h (\sigma_{ii} / \sigma_{jj}))^2 & \forall i, j \quad \forall h \end{cases} \quad [4.12]$$

En primer lugar, se asume un prior difuso para las constantes del modelo, de manera que su estimación estará determinada exclusivamente por la información muestral. En segundo lugar, los restantes parámetros del sistema son considera-

dos como variables aleatorias independientes entre sí (de ahí el carácter diagonal de  $V_\beta$ ) cuyas varianzas están controladas por un reducido vector de hiperparámetros, que actúa sobre tres dimensiones esenciales de un modelo VAR: dinámica propia de primer orden ( $\pi_1$ ), dinámica general ( $g_h$ ) y dinámica cruzada ( $F_{ij}$ ).

El hiperparámetro  $\pi_1$ , con  $0 \leq \pi_1 < \infty$ , mide el grado de confianza que el analista tiene en el prior sobre la media. Así, si  $\pi_1 \rightarrow 0$  considerará que el parámetro asociado al primer retardo propio es muy próximo a la unidad y, por el contrario, si  $\pi_1 \rightarrow \infty$  adoptará un prior difuso sobre dicho parámetro, dando como resultado que su determinación se haga sólo en función de la información muestral. Asimismo, este hiperparámetro refleja la incertidumbre global que el analista tiene sobre la proximidad del modelo al prior expresado en [4.8], esto es,  $\pi_1$  también cuantifica el grado de incertidumbre global: si  $\pi_1 \rightarrow 0$  el sistema se considera muy similar a  $k$  paseos aleatorios con deriva posiblemente correlacionados de forma contemporánea y, si  $\pi_1 \rightarrow \infty$ , será afín a un modelo VAR no restringido.

La matriz  $F$  especifica, desde un punto de vista extramuestral, la interacción dinámica entre las series del modelo. En el caso del prior de Minnesota se asume una estructura simétrica de la forma:

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \pi_2 & i \neq j \end{cases} \quad [4.13]$$

Así, el hiperparámetro  $\pi_2$ , con  $0 \leq \pi_2 < \infty$ , cuantifica el grado de asociación temporal entre las variables del sistema: si  $\pi_2 \rightarrow 0$  el sistema carecerá de interacción dinámica entre las  $k$  variables que lo integran. Por el contrario, si  $\pi_2 \rightarrow \infty$  no se asumirá hipótesis alguna acerca de estas interacciones, dejando que sea la información muestral la que determine su naturaleza. Naturalmente, este esquema se puede generalizar tanto como se desee de manera que se pueden considerar bloques de variables, asimetrías, etc. Esta generalización implica una menor simplicidad en el modelo al aumentar el número de hiperparámetros.

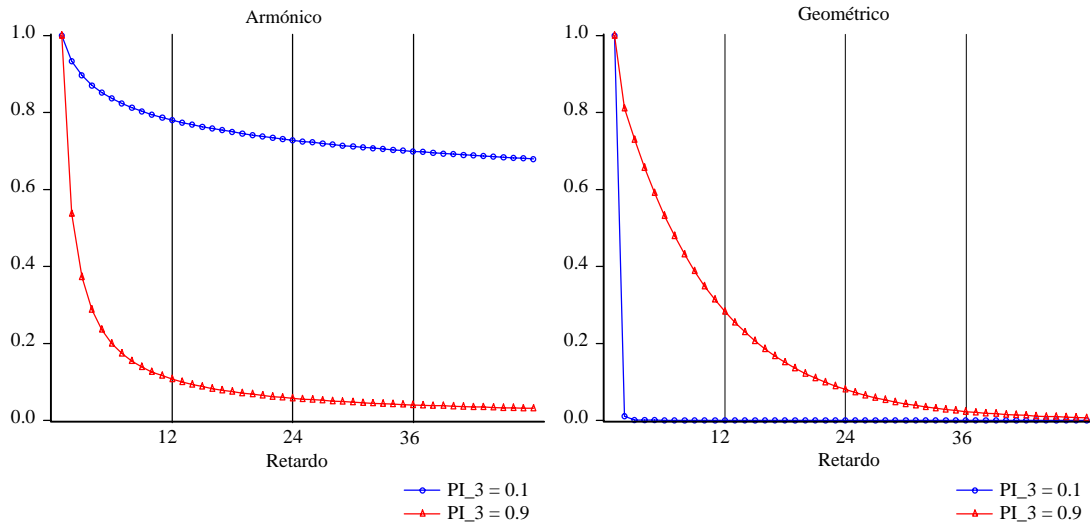
La función  $g_h$  mide el grado de reducción de la varianza en función del retardo. Puede ser representada utilizando un esquema de decaimiento geométrico o armónico:

$$g_h = \begin{cases} h^{-\pi_3} & 0 \leq \pi_3 < \infty \\ \pi_3^h & 0 \leq \pi_3 \leq 1 \end{cases} \quad [4.14]$$

Adicionalmente, se verifica  $g_h = 1$  si  $h = 1$ . El gráfico siguiente ilustra ambas funciones:

Gráfico 4.1

DECAIMIENTO TEMPORAL DEL PRIOR  $g_h$



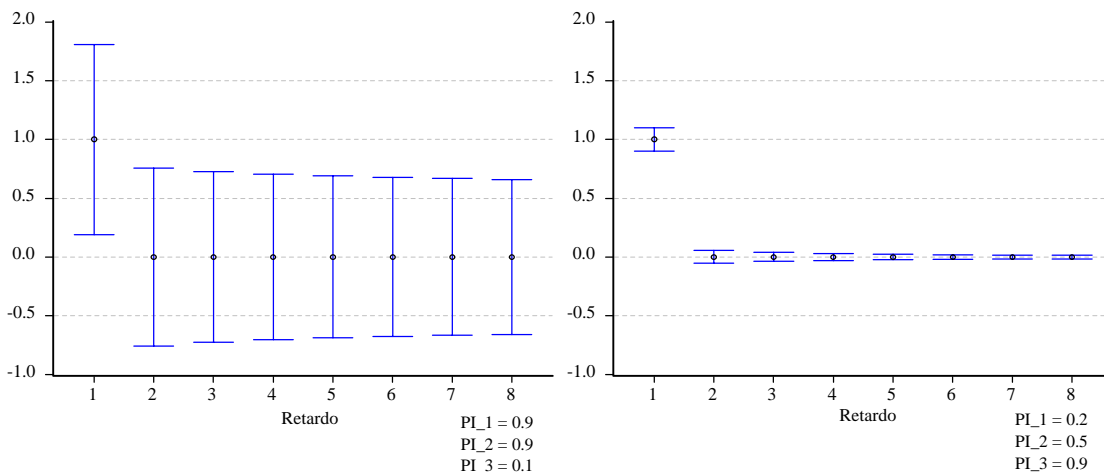
En ambos casos, a medida que  $h$  aumenta la varianza se aproxima a cero y, por lo tanto, más cerca se encuentra el modelo del prior asociado a  $\beta^*$ . Análogamente, en el caso armónico (geométrico) si  $\pi_3 \rightarrow \infty$  ( $\pi_3 \rightarrow 0$ ) la varianza del parámetro correspondiente se estrecha en torno a cero.

Finalmente, el término  $\sigma_{ii}/\sigma_{jj}$  refleja un factor de escala que hay que tener en cuenta si las variables que forman el modelo están expresadas en distintas unidades de medida. Estas varianzas se pueden determinar bien a través de  $k$  estimaciones AR univariantes o de una estimación VAR no restringida.

La interacción completa de todos los elementos del prior, tanto en lo que se refiere a la media como a la varianza, se muestra en el siguiente gráfico:

Gráfico 4.2

PRIOR DE MINNESOTA. DECAIMIENTO ARMÓNICO  
VALOR MEDIO  $\pm$  DESVIACIÓN TÍPICA





En resumen, se tiene un conjunto de restricciones estocásticas que se aplican al vector de coeficientes  $\beta$ , de la forma:

$$r = R\beta + w \quad [4.15]$$

estando  $r$  determinado por  $\beta^*$  –ecuación [4.8]–,  $R$  es una matriz identidad de dimensión  $k(kp + 1)$  y  $w$  es una perturbación de media nula y matriz de varianzas y covarianzas determinada por  $V_\beta$  –ecuación [4.12]–. Aplicando el método de estimación mixta expuesto en la segunda sección se obtiene el estimador de  $\beta$ :

$$\hat{\beta} = (((x'x) \otimes \Sigma^{-1}) + V_\beta^{-1})^{-1}((x' \otimes \Sigma^{-1})Z + V_\beta^{-1}\beta^*) \quad [4.16]$$

La correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de  $\beta$  es:

$$V_{\hat{\beta}} = (((x'x) \otimes \Sigma^{-1}) + V_\beta^{-1})^{-1} \quad [4.17]$$

Estas dos ecuaciones describen la distribución *a posteriori* de  $\beta$  en un contexto gaussiano con un prior normal multivariante. La interpretación es idéntica a la expuesta al tratar la estimación mixta, de forma que el estimador es una media ponderada del estimador MCO y del prior, dependiendo las ponderaciones de las respectivas matrices de varianzas y covarianzas.

Debe resaltarse que el estimador [4.16] es válido tanto en el caso en que se imponen restricciones simétricas como en el que no lo son. En el primero, siguiendo el álgebra SURE (*Seemingly Unrelated Regression Equations*), equivale a la estimación MCO ecuación por ecuación y, en el segundo, se trata de una estimación sistémica simultánea, véase Judge *et al.* (1980).

Con el transcurso del tiempo se han desarrollado especificaciones alternativas de la estructura de información extramuestral. Así, Ingram y Whiteman (1992) proponen acomodar dicha estructura a la que genera un modelo real del ciclo económico y Sims y Zha (1996) presentan una especificación diseñada para tener en cuenta la presencia de relaciones de cointegración. Véase también Zha (1998) y Robertson y Tallman (1999) para aplicaciones de esta última propuesta.

## 5. EXTENSION AL CASO ESTACIONAL

La aplicación de los modelos BVAR a series con estacionalidad se puede realizar de tres formas diferentes:

- efectuando un ajuste estacional preliminar,
- incorporando variables ficticias estacionales o
- generalizando la distribución *a priori* de los parámetros para tener en cuenta la presencia de estacionalidad.

El primer procedimiento es bastante habitual en el análisis aplicado debido a su sencillez, a la disponibilidad de procedimientos bastante fiables de extracción de señales y a que es consistente con gran parte del análisis económico cuantitativo, centrado en el uso de señales carentes de estacionalidad, tales como las series desestacionalizadas o las de ciclo-tendencia. No obstante, esta práctica puede tener efectos adversos sobre la especificación dinámica (Wallis, 1974; Sims, 1974) y está sujeta a serios problemas de estimación vinculados con la falta de invertibilidad que inducen los filtros desestacionalizadores (Maravall, 1993; Harvey y Scott, 1994).

El uso de variables ficticias de tipo estacional trata de controlar de forma explícita el efecto que la estacionalidad tiene sobre el nivel de la serie. Este procedimiento no incurre en los problemas antes comentados pero asume que el componente estacional de las series objeto de análisis evoluciona de manera determinista, hipótesis por lo general demasiado estricta.

Por último, la posibilidad más coherente consiste en extender el marco bayesiano expuesto en la sección anterior para acomodar la presencia del fenómeno estacional. En esta dirección se encuadran las propuestas de Ballabriga (1989), Canova (1992) y Raynauld y Simonato (1993). A continuación se expone el enfoque de estos últimos autores.

Sea  $Z_t$  un vector de observaciones efectuadas sobre  $k$  variables en el período  $t$ , cuya evolución está gobernada por un proceso VAR( $p$ ), siendo  $p$  un múltiplo del número  $s$  de observaciones por período anual:  $p = \tau s$ .

$$Z_t = \mu + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + U_t \quad [5.1]$$

Naturalmente, en el marco estacional  $p$  puede adoptar un valor elevado, con los consiguientes problemas de sobreajuste, multicolinealidad y agotamiento de los grados de libertad ya comentados. En consecuencia, la inclusión de restricciones en [5.1] es prácticamente obligatoria, incluso en sistemas de dimensión reducida,  $k=2$  o  $3$ .

La propuesta de Raynauld y Simonato consiste en generalizar el prior de Minnesota de manera que el modelo subyacente sea un paseo aleatorio estacional con deriva:

$$(1 - B)(1 - B^s)z_{i,t} = \mu_i + u_{it} \quad \forall i \quad [5.2]$$

Las matrices del modelo VAR( $p$ ) implicadas por [5.2] son:

$$\Phi_h = \begin{cases} I_k & h = 1, s \\ -I_k & h = s + 1 \\ 0 & h \neq 1, s, s + 1 \end{cases} \quad [5.3]$$

En consecuencia, la media del prior sobre los parámetros del modelo VAR( $p$ ) viene dada por:

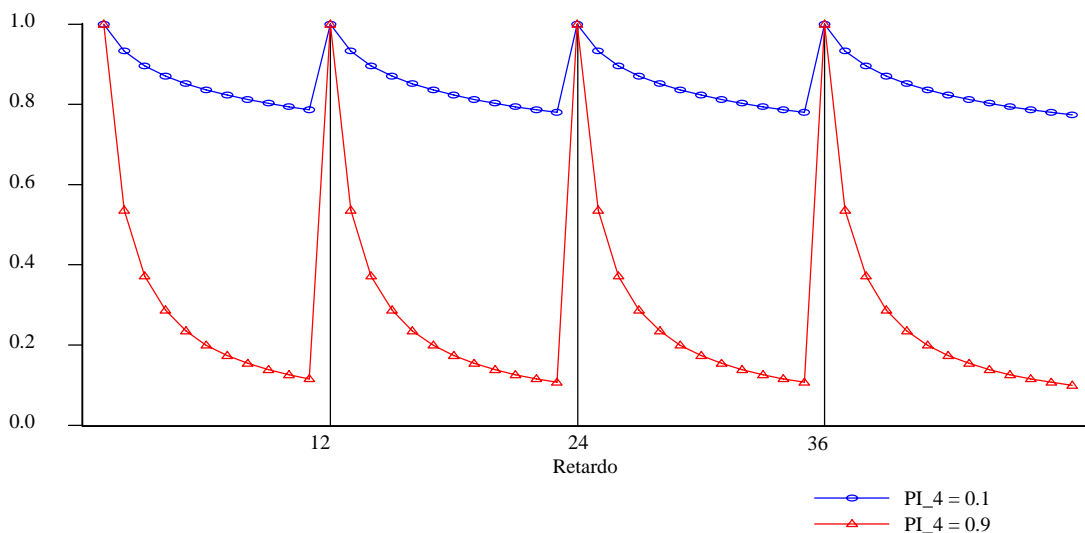
$$\beta^* = \begin{cases} \mu_i = 0 & \forall i \\ \phi_{i,j,h} = \begin{cases} 1 & i = j \quad h = 1, s \\ -1 & i = j \quad h = s + 1 \\ 0 & i \neq j \quad h \neq 1, s, s + 1 \end{cases} \end{cases} \quad [5.4]$$

La matriz de varianzas y covarianzas del prior también se modifica para tener en cuenta la estructura estacional. Así, estos autores proponen incluir dos nuevas funciones dependientes a su vez de dos hiperparámetros. La primera actúa como un factor que resalta los parámetros estacionales:

$$st_h = \begin{cases} h^{-\pi_4} & h = 1..s - 1 \\ (h - (s - 1))^{-\pi_4} & h = s..2s - 1 \\ (h - (2s - 1))^{-\pi_4} & h = 2s..3s - 1 \\ \text{etc.} \end{cases} \quad [5.5]$$

Esta función tiene un aspecto de dientes de sierra, sobresaliendo sólo los retardos estacionales:

**Gráfico 5.1**  
**PRIOR ESTACIONAL PARCIAL  $st_h$ , con  $s=12$**



El hiperparámetro  $\pi_4$  ( $0 \leq \pi_4 < \infty$ ) controla el ritmo de decaimiento fuera de los retardos estacionales, de manera que cuanto mayor es más rápidamente tiende a ceñirse la varianza del parámetro correspondiente hacia cero. Con el fin de limitar la interacción de esta función con el resto de los elementos que definen el prior sobre las varianzas, se introduce la segunda función:

$$sd_h = \pi_5^{d_h - 1} \quad [5.6]$$

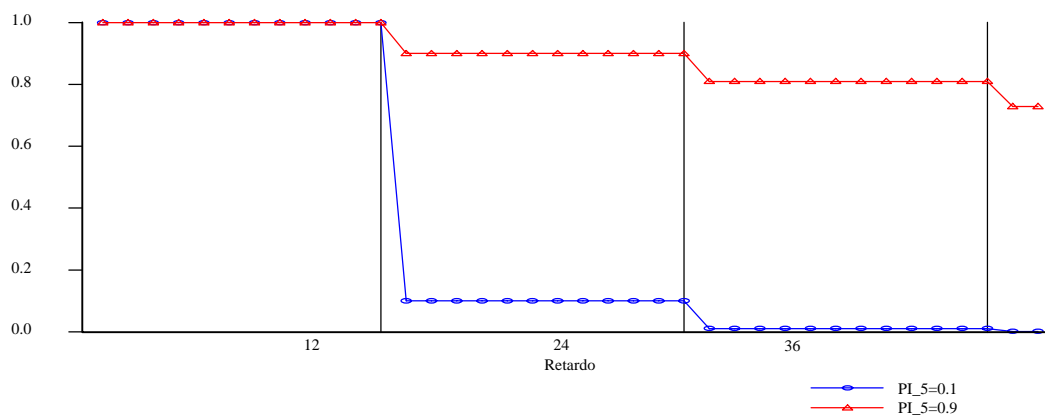
donde:



$$d_h = \begin{cases} 1 & h = 1..s - 1 \\ 2 & h = s + 1..2s - 1 \\ 3 & h = 2s + 1..3s - 1 \\ \text{etc.} \end{cases} \quad [5.7]$$

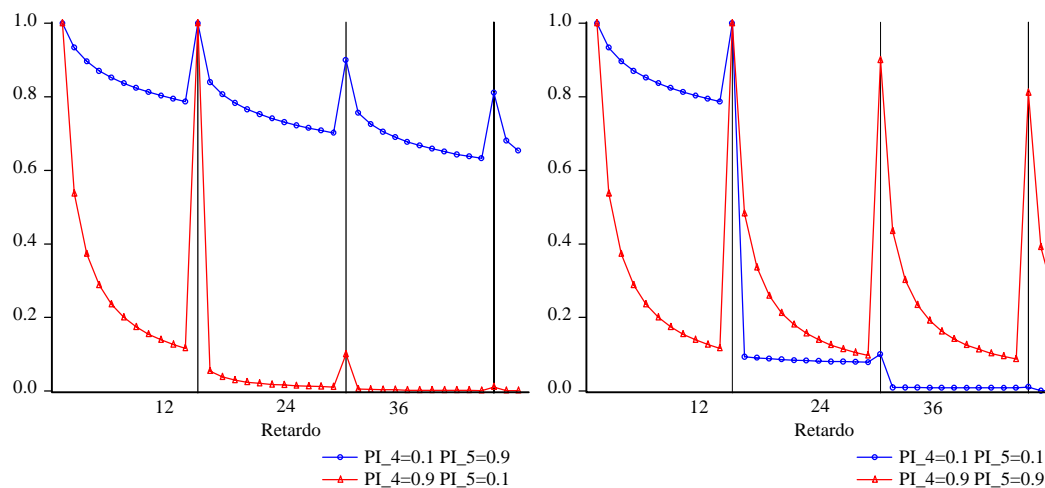
El hiperparámetro  $\pi_5$  ( $0 \leq \pi_5 \leq 1$ ) controla el ritmo de decaimiento entre los retardos estacionales, de manera que cuanto menor es más deprisa tiende a ajustarse la varianza del parámetro correspondiente hacia cero. Esta función tiene un aspecto escalonado, manteniendo constante el grado de reducción de la varianza dentro de cada tramo anual:

**Gráfico 5.2**  
**PRIOR ESTACIONAL PARCIAL  $sd_{h_t}$ , con  $s=12$**



La interacción entre ambas funciones da como resultado consideraciones extramuestrales muy diferentes con respecto a la pauta estacional de las series del modelo, como se aprecia en el gráfico siguiente:

**Gráfico 5.3**  
**PRIOR ESTACIONAL COMPLETO, con  $s=12$**



Combinando estas dos funciones adicionales con las que ya se consideraron para el caso no estacional, se tiene la siguiente especificación completa de las varianzas del prior sobre los parámetros del modelo:

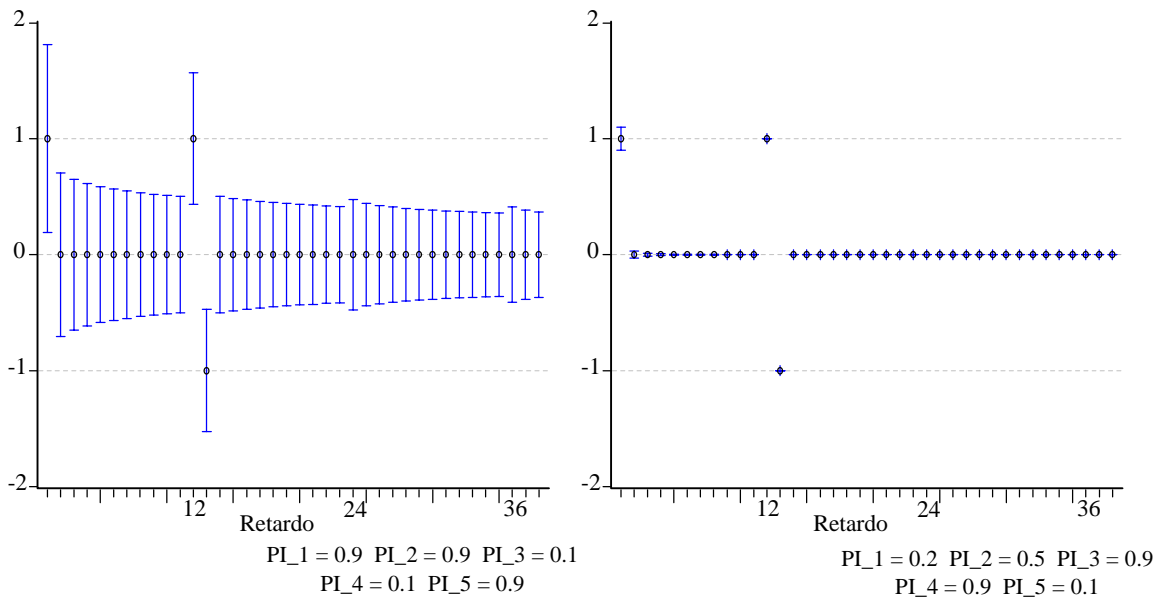
$$\text{diagonal}(V_{\beta}) = \begin{cases} v(\mu_i) = \infty & \forall i \\ v(\phi_{i,j,h}) = (\pi_1 F_{i,j} \text{st}_h \text{sd}_h (\sigma_{ii} / \sigma_{jj}))^2 & \forall i, j \quad \forall h \end{cases} \quad [5.8]$$

donde los restantes elementos tienen el mismo significado que en el caso no estacional. Análogamente, la estimación se realiza de la misma forma que en el caso no estacional mediante el procedimiento de estimación mixta, aplicándose las mismas consideraciones expuestas en la sección anterior.

En el gráfico siguiente se aprecia el prior completo, en media y varianza, como función del retardo del modelo:

**Gráfico 5.4**

**PRIOR ESTACIONAL DE RAYNAULD-SIMONATO. DECAIMIENTO REGULAR ARMÓNICO VALOR MEDIO ± DESVIACIÓN TÍPICA**



## 6. CALIBRADO

La estimación del modelo BVAR requiere la determinación preliminar del vector de  $m$  hiperparámetros  $\pi$ . Este proceso puede realizarse mediante consideraciones exclusivamente *a priori* o bien basarse en la optimización de una determinada función objetivo  $F(\beta(\pi))$ . Naturalmente, ambas opciones son

complementarias, ya que tanto las características estadísticas de los datos como los elementos teóricos pueden condicionar la selección particular de  $\pi$ .

Si el vector  $\pi$  es de dimensión reducida es posible realizar un muestreo completo de dicho vector y evaluar en todos los puntos  $F(\beta(\pi))$ . El valor de  $\pi$  que la haga máxima determinará los hiperparámetros. Naturalmente, con valores moderados o elevados de  $m$  este procedimiento no es razonable ni conveniente, por lo que se han propuesto distintos métodos de calibrado. Así, Todd (1988) examina el procedimiento de búsqueda axial, consistente en aplicar el siguiente algoritmo:

1. Calibrado inicial:  $\pi_0 = (\pi_{i,0} \ i = 1..m)$ .
2. Fijados todos los elementos de  $\pi$  menos uno ( $\pi_j$ ) variar sólo éste y evaluar la función objetivo en un rango prefijado  $(\pi_{j,0} - \alpha_j, \pi_{j,0} + \alpha_j)$  con incrementos dados  $\Delta\pi$ .
3. Se selecciona el valor de  $\pi_j$  que maximiza  $F(\beta(\pi))$ :  $\pi_{j,1}$ .
4. Fijado  $\pi_j$  se selecciona el siguiente hiperparámetro  $\pi_{j+1}$  y se repiten los pasos 2 y 3 hasta satisfacer un criterio de convergencia predeterminado.

Si las curvas iso- $F(\bullet)$  son relativamente ortogonales en el espacio  $\pi$ , el procedimiento de búsqueda axial proporcionará buenos resultados de forma rápida. Por el contrario, si dichas curvas son elípticas o adoptan formas irregulares, el procedimiento podrá verse atrapado en un óptimo local o su convergencia ser muy lenta. Con el fin de asegurar la globalidad del máximo, se recomienda repetir varias veces el algoritmo variando el calibrado inicial  $\pi_0$ .

Por otra parte, Sims (1986b) propone el uso de un suavizado bayesiano consistente en:

1. Evaluación de  $F(\beta(\pi))$  en una malla reducida (50 puntos, p.e.) pero que cubra una región amplia del espacio de comportamiento de  $\pi$ .
2. Generación de una malla detallada mediante interpolación.
3. Búsqueda refinada del óptimo mediante el procedimiento de ascenso rápido (*hill climbing*).

La elección de la métrica  $F(\beta(\pi))$  depende del objetivo del modelo y de las características de los datos. Desde un punto de vista teórico, la función de verosimilitud es un candidato muy atractivo:

$$\begin{aligned} \ell(\beta | Z) = & -(kn/2)\ln(2\Pi) - (1/2)\ln|\Sigma \otimes I_n| - \\ & - (1/2)(Z - (I_k \otimes x)\beta)'(\Sigma^{-1} \otimes I_n)(Z - (I_k \otimes x)\beta) \end{aligned} \quad [6.1]$$

Otras posibilidades giran en torno al rendimiento predictivo extramuestral del modelo: determinante de la matriz de varianzas y covarianzas de los errores de predicción  $H$  pasos adelante, error cuadrático medio de los errores de predicción con horizonte  $H$ , estadístico  $U$  de Theil, etc.

Un adecuado calibrado es especialmente importante para determinadas aplicaciones de los BVAR como, por ejemplo, el análisis de cointegración (Alvarez y Ballabriga, 1994) o la detección de las estructuras de rango reducido que conducen a los llamados ‘modelos índice’ o VAR de rango reducido (Reinsel, 1983).

Por último, un enfoque que puede combinar el tratamiento bayesiano de los parámetros con la especificación empírica de los VAR consiste en la aplicación del método de Monte Carlo sobre cadenas de Markov (*Gibbs sampler*), de manera que se estiman parámetros e hiperparámetros mediante un mismo procedimiento iterativo, véase Li y Tsay (1998) y LeSage (1999).

## 7. MODELOS BVAR Y VARMA

Los modelos VARMA constituyen una forma alternativa de restringir la tendencia sobreparametrizadora de los VAR. En lugar de imponer restricciones bayesianas mediante un vector de hiperparámetros sobre la estructura VAR, los modelos VARMA expanden el espacio de medida incorporando las innovaciones de períodos anteriores:

$$Z_t = \mu + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + U_t - \Theta_1 U_{t-1} - \Theta_2 U_{t-2} - \dots - \Theta_q U_{t-q} \quad [7.1]$$

La inclusión de los términos VMA equivale funcionalmente a la imposición de una serie de restricciones no lineales sobre una representación VAR(p). Para ilustrar esta equivalencia se considera el caso  $p = q = 1$  con  $\mu = 0$ :

$$Z_t = \Phi Z_{t-1} + U_t - \Theta U_{t-1} \quad [7.2]$$

Asumiendo invertibilidad, la representación VAR( $\infty$ ) puede ser truncada para un  $p$  suficientemente elevado:

$$Z_t = \Pi_1 Z_{t-1} + \Pi_2 Z_{t-2} + \dots + \Pi_p Z_{t-p} + U_t \quad [7.3]$$

Las matrices  $\Pi_h$  satisfacen la siguiente relación:

$$\Pi_h = \Theta^h (\Phi - \Theta) \quad h = 1..p \quad [7.4]$$

De manera aproximada, se puede establecer una equivalencia funcional entre los elementos de la matriz  $\Theta$  y el vector  $\pi$  de hiperparámetros de un BVAR:

- la incertidumbre global ( $\pi_1$ ) está representada de forma conjunta en la matriz  $\Theta$ , sobre todo al realizar la operación  $(\Phi - \Theta)$ ,
- los elementos situados fuera de la diagonal principal de  $\Theta$  condicionan la dinámica cruzada, teniendo un papel similar al de la matriz  $F$ . De esta manera se pueden considerar bloques de variables, asimetrías, etc.

- los elementos diagonales  $\Theta_{ii}$  restringen, de forma individualizada, la dinámica propia de cada variable de manera que su función es análoga a la del hiperparámetro  $\pi_3$  de un esquema de decaimiento geométrico.

De esta manera, se aprecia cómo un modelo VARMA(1,1) equivale a un VAR de elevado orden sujeto a restricciones no lineales. En consecuencia, los elementos que componen  $\Theta$  actúan a modo de hiperparámetros, si bien su determinación numérica se realiza al mismo tiempo que los parámetros contenidos en  $\Phi$ , mediante la maximización de la función de verosimilitud exacta (Hillmer y Tiao, 1979), y no, como en el caso BVAR, de forma separada a través del proceso de calibrado. No obstante, si un modelo BVAR es calibrado atendiendo también a criterios de máxima verosimilitud, la semejanza con un VARMA deberá ser elevada, al menos en lo que concierne a sus propiedades sistémicas.

## 8. INFERENCIA

Los modelos BVAR son utilizados para diversas aplicaciones de tipo inferencial, tales como la predicción condicionada e incondicionada (Litterman y Supel, 1983; Litterman, 1986), el análisis de mecanismos de propagación mediante las funciones de respuesta al impulso (Sims, 1980, 1986a; Runkle, 1987; Blanchard y Quah, 1989 y Blanchard, 1989), la identificación de relaciones de causalidad en el sentido de Granger (Lütkepohl, 1991) o el diseño de sistemas de control óptimo (Litterman, 1982, 1987).

Asimismo, los modelos BVAR pueden ser empleados para detectar y estimar relaciones de cointegración. En este sentido, el enfoque más difundido es el propuesto por Johansen (1988, 1991). En esta sección se comenta brevemente un enfoque alternativo, el análisis canónico de Box y Tiao (1977) que puede ser interesante debido a su sencillez. Véase Bewley *et al.* (1994), Bewley y Yang (1995) y Gonzalo (1994) para un estudio de sus propiedades mediante simulaciones de Monte Carlo.

El análisis canónico propuesto por Box y Tiao (1977) permite estimar  $k$  variables,  $W_t : k \times 1$ , a partir de una transformación lineal de las  $k$  series observadas,  $Z_t$ :

$$W_t = MZ_t \quad [8.1]$$

Las filas de la matriz  $M$  que define a los componentes canónicos son los autovectores asociados a los autovalores ordenados (de mayor a menor) de la siguiente matriz:

$$Q = \Gamma_Z(0)^{-1} \Gamma_{Ze}(0) = I - \Gamma_Z(0)^{-1} \Sigma \quad [8.2]$$

donde  $\Gamma_Z(0)$ ,  $\Gamma_{Z_e}(0)$  y  $\Sigma$  son, respectivamente, las matrices de varianzas y covarianzas de  $Z_t$ , del predictor óptimo de  $Z_{t+1}$  basado en un modelo BVAR y de las innovaciones  $U_t$  de dicho modelo.

La matriz  $Q$  es el análogo multivariante del coeficiente de determinación  $R^2$  del análisis de regresión. En consecuencia, sus autovalores ( $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ ) miden el grado de predecibilidad de las variables  $W_t$  que se forman a partir de sus autovectores: cuanto mayor es  $\lambda_i$ , más exacta resulta la predicción de  $w_{it} = m_i(\lambda_i)Z_t$ .

Box y Tiao demuestran que, si el sistema posee  $r$  raíces unitarias, entonces  $Q$  también. En consecuencia, existen  $k-r$  combinaciones lineales de  $Z_t$  que son estacionarias y que definen, por tanto, relaciones de cointegración (Peña, 1990). De esta manera, el análisis canónico permite identificar y estimar relaciones de cointegración basadas en una modelización explícita y parsimoniosa de los datos. De esta forma, si existen  $r$  autovalores unitarios en  $Q$  y  $k-r$  que no lo son, se tienen  $r$  componentes  $W_t$  no estacionarios que dan cuenta de la falta de estacionariedad de las  $k$  series originales, y  $k-r$  componentes que sí son estacionarios y que reflejan relaciones de cointegración.

Con el fin de obtener una distribución en el muestreo de los estadísticos derivados del análisis canónico y poder así cuantificar la incertidumbre asociado al mismo, se puede realizar un remuestreo de tipo *bootstrap* consistente en:

1. Muestrear, mediante un esquema aleatorio simple con reposición, los residuos multivariantes.
2. Calcular la correspondiente matriz  $\Sigma$  de varianzas y covarianzas.
3. Manteniendo fija  $\Gamma_Z(0)$ , evaluar  $Q$  y los correspondientes autovalores y autovectores.
4. Volver al paso 1 hasta alcanzar un número prefijado de simulaciones.

De esta forma, se obtiene una distribución *bootstrap* del vector de autovalores  $\lambda$  de la que pueden derivarse valores medios, desviaciones típicas e intervalos de confianza, sustentándose de manera más sólida el análisis de cointegración.

## 9. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

Los modelos VAR se han convertido en la referencia básica en lo que concierne al análisis cuantitativo de series temporales múltiples. Algunas de sus características menos deseables han sido corregidas mediante la incorporación de restricciones bayesianas, dando lugar a los modelos BVAR. Esta clase de mode-

los se utilizan con profusión para la predicción y el control y, convenientemente identificados, para el análisis de políticas económicas y la cuantificación de los esquemas de impulso y propagación que rigen en un determinado sistema económico. Como muestra de una literatura muy extensa véase Litterman y Weiss (1985), Todd (1990) y Sims (1993, 1998).

Las ideas básicas subyacentes a la metodología BVAR son muy generales y han sido aplicadas en contextos muy diferentes de los inicialmente contemplados por sus creadores. Como ejemplo significativo, Black y Litterman las han trasladado al ámbito de la selección óptima de carteras de activos, siendo una de las herramientas básicas en numerosos bancos de inversión como, por ejemplo, Goldman & Sachs. Véase Black y Litterman (1992), Bevan y Winkelmann (1998) y He y Litterman (1999).

A continuación se comentan algunas posibles extensiones de estos modelos. En primer lugar, los modelos BVAR pueden ser utilizados para realizar un análisis multivariante completo de las observaciones anómalas, siguiendo la propuesta de Tsay *et al.* (1998). De esta manera, además de localizar en el tiempo la presencia y tipo de tales observaciones se podrá examinar la interacción dinámica que generan en las series analizadas.

Una segunda línea de desarrollo consiste en la incorporación de estructuras simplificadoras derivadas del análisis de cointegración o del análisis factorial dinámico (Peña y Box, 1987). Los modelos vectoriales de corrección de error (VECM) se encuadran en esta línea (Johansen, 1995) así como los métodos de factorización propuestos por Tjostheim y Paulsen (1982).

Por último, la plena aplicación de los procedimientos de simulación de tipo Monte Carlo sobre cadenas de Markov (*Gibbs sampler*) permitirán una aplicación muy general de los principios de estimación bayesiana característicos de los modelos aquí analizados, véase Li y Tsay (1998) y LeSage (1999).

## APENDICE A: RECURSOS EN INTERNET

El programa por excelencia para la estimación y análisis de modelos BVAR es el RATS (*Regression Analysis of Time Series*), desarrollado inicialmente por Doan y Litterman en el Banco de la Reserva Federal de Minneapolis. Acerca del mismo, puede consultarse su página en Internet en la dirección <http://www.estima.com>.

El profesor de la Universidad de Toledo (Ohio, USA) James LeSage dispone en su página de Internet de una extensa e interesante librería de programas Matlab para estimar modelos BVAR. Dicha librería incluye funciones muy sofisticadas como, por ejemplo, las que permiten la aplicación del método de Monte



Carlo sobre cadenas de Markov para estimar los BVAR. La dirección es: <http://jpl.econ.utoledo.edu/faculty/lesage/>. Asimismo, la página del profesor de la Universidad de Princeton (New Jersey, USA) Christopher Sims contiene artículos y programas útiles: <http://www.princeton.edu/~sims/>.

Los modelos VAR y VARMA pueden ser estimados y analizados mediante el paquete SCA (*Scientific Computing Associates*), desarrollado por Liu y Hudak con la colaboración de Tiao, Bell, etc. Consúltense sus especificaciones en <http://www.scausa.com>.

La página del servicio de estudios del Banco de la Reserva Federal de Minneapolis contiene una excelente y completa compilación de algunos de los trabajos que dieron origen a los modelos BVAR: <http://www.minneapolisfed.org>. En el Banco de la Reserva Federal de Atlanta también se ofrecen diversos artículos relacionados con los modelos BVAR: <http://www.federalreservebankatlanta.org>.

Sobre el modelo de selección de cartera de Black-Litterman, puede consultarse la página del profesor de la Fuqua School of Business - Duke University, (North Carolina, USA) Campbell Harvey: <http://www.campbell.harvey.fuqua.duke.edu>.

Finalmente, el autor está desarrollando una librería de programas Matlab para la estimación y análisis de modelos BVAR estacionales que puede ser solicitada a la dirección de correo electrónico [emquillis@ine.es](mailto:emquillis@ine.es).



## REFERENCIAS

- ÁLVAREZ, L.J. y BALLABRIGA, F.C. (1994): "BVAR models in the context of cointegration: a Monte Carlo experiment", Banco de España, Documento de Trabajo n.º 9405.
- BALLABRIGA, F. (1989): "Empirical macroeconomic modelling of the Spanish economy: 1969-1984", Ministerio de Economía y Hacienda, D.G. Planificación, Documento Interno.
- BEVAN, A. y WINKELMANN, K. (1998): "Using the Black-Litterman global asset allocation model: three years of practical experience", Goldman Sachs, Fixed Income Research, Working Paper.
- BEWLEY, R., ORDEN, D., YANG, M. y FISHER, L.A. (1994): "Comparison of Box-Tiao and Johansen canonical estimators of cointegrating vectors in VEC(1) models", *Journal of Econometrics*, n.º 64, pp. 3-27.
- BEWLEY, R. y YANG, M. (1995): "Tests for cointegration based on canonical correlation analysis", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, número 431, pp. 990-996.
- BLACK, F. y LITTERMAN, R.B. (1992): "Global portfolio optimization", *Financial Analysts Journal*, september/october, pp. 28-43.
- BLANCHARD, O.J. (1989): "A traditional interpretation of macroeconomic fluctuations", *American Economic Review*, vol. 79, n.º 5, pp. 1146-1164.
- BLANCHARD, O.J. y QUAH, D. (1989): "The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances", *American Economic Review*, vol. 79, n.º 4, pp. 655-673.
- BOX, G.E.P. y TIAO, G.C. (1977): "A canonical analysis of multiple time series", *Biometrika*, vol. 64, n.º 2, pp. 355-365.
- CANOVA, F. (1992): "An alternative approach to modeling and forecasting seasonal time series", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 10, n.º 1, pp. 97-108.
- CLEMENT, D. (2000): "Greater than the sum: the Minneapolis Fed and the University of Minnesota partnership", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *The Region*, vol. 14, n.º 4.
- CHOI, B. (1992): *ARMA model identification*, Springer-Verlag, New York, Estados Unidos de América.
- DENIAU, C., FIORI, G. y MATHIS, A. (1992): "Sélection du nombre de retards dans un modèle VAR, conséquences éventuelles du choix des critères", *Economie et Prévision*, n.º 106, pp. 61-69.
- DOAN, Th., LITTERMAN, R.B. y SIMS, CH.A. (1984): "Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions", *Econometric Review*, n.º 3, pp. 1-144.

- ENDERS, W. (1995): *Applied econometric time series*, John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos de América.
- ESPASA, A. y CANCELO, J.R. (1993): *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*, Alianza Editorial, Madrid, España.
- GONZALO, J. (1994): "Five alternative methods for estimating long-run equilibrium relationships", *Journal of Econometrics*, vol. 60, pp. 203-33.
- GORDON, R.J (1993): "Introduction: continuity and change in theory, behavior, and methodology", en Gordon, R.J. (Ed.) *The american business cycle*, NBER Studies in Business Cycles, vol. 25, The University of Chicago Press, Chicago, Estados Unidos de América.
- HARVEY, A.C. (1989): *Forecasting, structural time series and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- HARVEY, A.C. y SCOTT, A. (1994): "Seasonality in dynamic regression models", *Economic Journal*, vol. 104, pp. 1324-1345.
- HE, G. y LITTERMAN, R.B. (1999): "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", Goldman Sachs, Fixed Income Research, Working Paper.
- HILLMER, S.C. y TIAO, G.C. (1979): "Likelihood function of stationary multiple autoregressive moving average models", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, n. 367, pp. 652-660.
- HOERL, A.E. y KENNARD, R.W. (1970): "Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems", *Technometrics*, vol. 42, n.º 1, pp. 80-87.
- INGRAM, B.F. y WHITEMAN, C.H. (1994): "Supplanting the 'Minnesota' prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors", *Journal of Monetary Economics*, vol. 34, pp. 497-510.
- JOHANSEN, S. (1988): "Statistical analysis of cointegrating vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control*, n.º 12, pp. 231-254.
- (1991): "Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models", *Econometrica*, vol. 59, n.º 6, pp. 1551-1580.
- (1995): *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*, Oxford University Press, Oxford, Reino Unido.
- JUDGE, G.C., GRIFFITHS, W.E., CARTER HILL, R. y LEE, T.C. (1980): *The theory and practice of econometrics*, John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos de América.
- LESAGE, J.P. (1999): "Applied econometrics using MATLAB", University of Toledo (Ohio), Department of Economics, Documento Interno.
- LI, H. y TSAY, R.S. (1998): "A unified approach to identifying multivariate time series models", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 93, n.º 442, páginas 770-782.
- LITTERMAN, R.B. (1982): "Optimal control of the money supply", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 6, n.º 3, pp. 2-14.

- LITTERMAN, R.B. (1984a): "Specifying vector autoregressions for macroeconomic forecasting", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Staff Report n.º 92.
- (1984b): "Forecasting and policy analysis with bayesian vector autoregression models", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 8, n.º 4, páginas 30-41.
  - (1986): "Forecasting with bayesian vector autoregressions - five years of experience", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 4, n.º 1, pp. 25-38.
  - (1987): "The limits of counter-cyclical monetary policy: an analysis based on optimal control theory and vector autoregressions", *Annales d'Economie et de Statistique*, n.º 6/7, pp. 125-160.
- LITTERMAN, R.B. y SUPEL, TH. M. (1983): "Using VAR to measure the uncertainty in Minnesota's revenue forecasts", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 7, pp. 10-22.
- LITTERMAN, R.B. y WEISS, L. (1985): "Money, real interest rates, and output: a reinterpretation of postwar U.S. data", *Econometrica*, vol. 53, n.º 1, pp. 129-156.
- LIU, L.M. (1986): "Multivariate time series analysis using vector ARMA models", SCA Monograph.
- LUCAS, R.E. (1976): "Econometric policy evaluation: a critique", en Brunner, K. y Meltzer, A.H. (Eds.) *The Phillips curve and labor markets*, Carnegie-Rochester Conference, Series on Public Policy, vol. 1, pp. 19-46.
- LUCAS, R.E. y SARGENT, T.J. (1979): "After keynesian macroeconomics", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 3, n.º 2, pp. 1-16.
- LÜTKEPOHL, H. (1991): *Introduction to multiple time series analysis*, Springer Verlag, Berlín, Alemania.
- MARAVALL, A. (1993): "Stochastic linear trends. Models and estimators", *Journal of Econometrics*, n.º 56, pp. 5-37.
- PEÑA, D. (1987): *Estadística. Modelos y métodos. Vol. 2: Modelos lineales y series temporales*, Alianza Editorial, Madrid, España.
- (1990): "Cointegración y reducción de dimensionalidad en series temporales multivariantes", *Cuadernos Económicos de ICE*, n.º 44, pp. 109-126.
- PEÑA, D. y BOX, G.E.P. (1987): "Identifying a simplifying structure in time series", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 82, n.º 399, pp. 836-842.
- PRESCOTT, E.C. (1977): "Should control theory be used for economic stabilization?", en Brunner, K. y Meltzer, A. (Eds.) *Optimal policies, control theory and technology exports*, Carnegie-Rochester Conference, Series on Public Policy, vol. 7.
- RAYNAULD, J. y SIMONATO, J.G. (1993): "Seasonal BVAR models", *Journal of Econometrics*, vol. 55, pp. 203-229.
- REINSEL, G.C. (1983): "Some results on multivariate autoregressive index models", *Biometrika*, vol. 70, n.º 1, pp. 145-156.

- REINSEL, G. (1993): *Elements of multivariate time series analysis*, Springer Verlag, New York, Estados Unidos de América.
- ROBERTSON, J.C. y TALLMAN, E.W. (1999): "Vector autoregressions: forecasting and reality", Federal Reserve Bank of Atlanta, *Economic Review*, first quarter, páginas 4-18.
- RUNKLE, D. (1987): "Vector autoregressions and reality", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 5, n.º 4, pp. 437-442.
- SARGENT, TH.J. (1979): "Estimating vector autoregressions using methods not based on explicit economic theories", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 3, n.º 3, pp. 8-15.
- SCHMIDT, P. (1976): *Econometrics*, Marcel Dekker, New York, Estados Unidos de América.
- SIMS, CH.A. (1974): "Seasonality in regression", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, n.º 347, pp. 618-626.
- (1980): "Macroeconomics and reality", *Econometrica*, vol. 48, n.º 1, pp. 1-48.
  - (1986a): "Are forecasting models usable for policy analysis?", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 10, n.º 1, pp. 2-15.
  - (1986b): "BAYESMTH: A program for multivariate Bayesian interpolation", University of Minnesota, Center for Economic Research, Discussion Paper número 234.
  - (1993): "A nine-variable probabilistic macroeconomic forecasting model", en Stock, J.H. y Watson, M.W. (Eds.) *Business cycles, indicators and forecasting*, NBER Studies in Business Cycles, vol. 28, Univ. of Chicago Press, Chicago, Estados Unidos de América.
  - (1998): "The role of interest rate policy in the generation and propagation of business cycles: what has changes since the 30's?", en Fuhrer, J.C y Schuh, S. (Eds.) *Beyond shocks: what causes business cycles?*, Federal Reserve Bank of Boston, Conference Series n.º 42.
- SIMS, CH.A. y ZHA, T. (1996): "Bayesian methods for dynamic multivariate models", Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper n.º 96-13.
- THEIL, H. (1971): *Principles of econometrics*, John Wiley and Sons, New York, Estados Unidos de América.
- TIAO, G.C. y BOX, G.E.P. (1981): "Modelling multiple time series with applications", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 76, n.º 376, pp. 802-816.
- TIAO, G.C., BOX, G.E.P., GRUPE, M.R., HUDAK, G.B., BELL, W.R. y CHANG, I. (1979): "The Wisconsin Multiple Time Series program (WMTS). A preliminary guide", Department of Statistics, University of Wisconsin, Documento Interno.
- TJOSTHEIM, D. y PAULSEN, J. (1982): "Empirical identification of multiple time series", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 3, n.º 4, pp. 265-282.

- TODD, R.M. (1984): "Improving economic forecasting with bayesian vector autoregressions", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, vol. 8, n.º 4, pp. 18-29.
- (1988): "Implementing bayesian vector autoregressions", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Working Paper n.º 384.
  - (1990): "Vector autoregression evidence on monetarism: another look at the robustness debate", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Quarterly Review*, volumen 14, n.º 2, pp. 1-20.
- TSAY, R.S. (2000): "Notes on univariate time series analysis", University of Chicago, Graduate School of Business, Documento Interno.
- TSAY, R.S., PEÑA, D. y PANKRATZ, A.E. (1998): "Outliers in multiple time series", University of Chicago, Graduate School of Business, Technical Report.
- VELDE, I. (1990): "Minneapolis Fed's Research Department: spanning economic theory and policy", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *The Region*, vol. 4, n.º 2.
- WALLIS, K.F. (1974): "Seasonal adjustment and relations between variables", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, n.º 345, pp. 18-31.
- ZHA, T. (1998): "A dynamic multivariate model for use in formulating policy", Federal Reserve Bank of Atlanta, *Economic Review*, first quarter, pp. 16-29.



## ***NORMAS DE PUBLICACIÓN DE PAPELES DE TRABAJO DEL INSTITUTO DE ESTUDIOS FISCALES***

Esta colección de *Papeles de Trabajo* tiene como objetivo ofrecer un vehículo de expresión a todas aquellas personas interesadas en los temas de Economía Pública. Las normas para la presentación y selección de originales son las siguientes:

1. Todos los originales que se presenten estarán sometidos a evaluación y podrán ser directamente aceptados para su publicación, aceptados sujetos a revisión, o rechazados.
2. Los trabajos deberán enviarse por duplicado a la Subdirección de Estudios Tributarios. Instituto de Estudios Fiscales. Avda. Cardenal Herrera Oria, 378. 28035 Madrid.
3. La extensión máxima de texto escrito, incluidos apéndices y referencias bibliográficas será de 7000 palabras.
4. Los originales deberán presentarse mecanografiados a doble espacio. En la primera página deberá aparecer el título del trabajo, el nombre del autor(es) y la institución a la que pertenece, así como su dirección postal y electrónica. Además, en la primera página aparecerá también un abstract de no más de 125 palabras, los códigos JEL y las palabras clave.
5. Los epígrafes irán numerados secuencialmente siguiendo la numeración arábica. Las notas al texto irán numeradas correlativamente y aparecerán al pie de la correspondiente página. Las fórmulas matemáticas se numerarán secuencialmente ajustadas al margen derecho de las mismas. La bibliografía aparecerá al final del trabajo, bajo la inscripción "Referencias" por orden alfabético de autores y, en cada una, ajustándose al siguiente orden: autor(es), año de publicación (distinguiendo a, b, c si hay varias correspondientes al mismo autor(es) y año), título del artículo o libro, título de la revista en cursiva, número de la revista y páginas.
6. En caso de que aparezcan tablas y gráficos, éstos podrán incorporarse directamente al texto o, alternativamente, presentarse todos juntos y debidamente numerados al final del trabajo, antes de la bibliografía.
7. En cualquier caso, se deberá adjuntar un disquete con el trabajo en formato word. Siempre que el documento presente tablas y/o gráficos, éstos deberán aparecer en ficheros independientes. Asimismo, en caso de que los gráficos procedan de tablas creadas en excel, estas deberán incorporarse en el disquete debidamente identificadas.

***Junto al original del Papel de Trabajo se entregará también un resumen de un máximo de dos folios que contenga las principales implicaciones de política económica que se deriven de la investigación realizada.***

## ***PUBLISHING GUIDELINES OF WORKING PAPERS AT THE INSTITUTE FOR FISCAL STUDIES***

This serie of *Papeles de Trabajo* (working papers) aims to provide those having an interest in Public Economics with a vehicle to publicize their ideas. The rules governing submission and selection of papers are the following:

1. The manuscripts submitted will all be assessed and may be directly accepted for publication, accepted with subjections for revision or rejected.
2. The papers shall be sent in duplicate to Subdirección General de Estudios Tributarios (The Deputy Direction of Tax Studies), Instituto de Estudios Fiscales (Institute for Fiscal Studies), Avenida del Cardenal Herrera Oria, nº 378, Madrid 28035.
3. The maximum length of the text including appendices and bibliography will be no more than 7000 words.
4. The originals should be double spaced. The first page of the manuscript should contain the following information: (1) the title; (2) the name and the institutional affiliation of the author(s); (3) an abstract of no more than 125 words; (4) JEL codes and keywords; (5) the postal and e-mail address of the corresponding author.
5. Sections will be numbered in sequence with arabic numerals. Footnotes will be numbered correlatively and will appear at the foot of the corresponding page. Mathematical formulae will be numbered on the right margin of the page in sequence. Bibliographical references will appear at the end of the paper under the heading "References" in alphabetical order of authors. Each reference will have to include in this order the following terms of references: author(s), publishing date (with an a, b or c in case there are several references to the same author(s) and year), title of the article or book, name of the journal in italics, number of the issue and pages.
6. If tables and graphs are necessary, they may be included directly in the text or alternatively presented altogether and duly numbered at the end of the paper, before the bibliography.
7. In any case, a floppy disk will be enclosed in Word format. Whenever the document provides tables and/or graphs, they must be contained in separate files. Furthermore, if graphs are drawn from tables within the Excell package, these must be included in the floppy disk and duly identified.

***Together with the original copy of the working paper a brief two-page summary highlighting the main policy implications derived from the re-search is also requested.***



## ÚLTIMOS PAPELES DE TRABAJO EDITADOS POR EL INSTITUTO DE ESTUDIOS FISCALES

### 2000

- 1/00 Crédito fiscal a la inversión en el impuesto de sociedades y neutralidad impositiva: Más evidencia para un viejo debate.  
*Autor:* Desiderio Romero Jordán.  
Páginas: 40.
- 2/00 Estudio del consumo familiar de bienes y servicios públicos a partir de la encuesta de presupuestos familiares.  
*Autores:* Ernesto Carrillo y Manuel Tamayo.  
Páginas: 40.
- 3/00 Evidencia empírica de la convergencia real.  
*Autores:* Lorenzo Escot y Miguel Ángel Galindo.  
Páginas: 58.

### *Nueva Época*

- 4/00 The effects of human capital depreciation on experience-earnings profiles: Evidence salaried spanish men.  
*Autores:* M. Arrazola, J. de Hevia, M. Risueño y J. F. Sanz.  
Páginas: 24.
- 5/00 Las ayudas fiscales a la adquisición de inmuebles residenciales en la nueva Ley del IRPF: Un análisis comparado a través del concepto de coste de uso.  
*Autor:* José Félix Sanz Sanz.  
Páginas: 44.
- 6/00 Las medidas fiscales de estímulo del ahorro contenidas en el Real Decreto-Ley 3/2000: análisis de sus efectos a través del tipo marginal efectivo.  
*Autores:* José Manuel González Páramo y Nuria Badenes Pla.  
Páginas: 28
- 7/00 Análisis de las ganancias de bienestar asociadas a los efectos de la Reforma del IRPF sobre la oferta laboral de la familia española.  
*Autores:* Juan Prieto Rodríguez y Santiago Álvarez García.  
Páginas 32.
- 8/00 Un marco para la discusión de los efectos de la política impositiva sobre los precios y el *stock* de vivienda.  
*Autor:* Miguel-Ángel López García.  
Páginas 36.
- 9/00 Descomposición de los efectos redistributivos de la Reforma del IRPF.  
*Autores:* Jorge Onrubia Fernández y María del Carmen Rodado Ruiz.  
Páginas 24.
- 10/00 Aspectos teóricos de la convergencia real, integración y política fiscal.  
*Autores:* Lorenzo Escot y Miguel-Ángel Galindo.  
Páginas 28.

## 2001

- 1/01 Notas sobre desagregación temporal de series económicas.  
*Autor:* Enrique M. Quilis.  
Páginas 38.
- 2/01 Estimación y comparación de tasas de rendimiento de la educación en España.  
*Autores:* M. Arrazola, J. de Hevia, M. Risueño, J.F. Sanz.  
Páginas 28.
- 3/01 Doble imposición, "efecto clientela" y aversión al riesgo.  
*Autores:* Antonio Bustos Gisbert y Francisco Pedraja Chaparro.  
Páginas 34.
- 4/01 Non-Institutional Federalism in Spain.  
*Autor:* Joan Rosselló Villalonga.  
Páginas 32.
- 5/01 Estimating utilisation of Health care: A groupe data regression approach.  
*Autor:* Mabel Amaya Amaya.  
Páginas 30.
- 6/01 Shapley inequality descomposition by factor components.  
*Autores:* Mercedes Sastre y Alain Trannoy  
Páginas 40.
- 7/01 An empirical analysis of the demand for physician services across the European Union.  
*Autores:* Sergi Jiménez Martín, José M. Labeaga y Maite Martínez-Granado  
Páginas 40.
- 8/01 Demand, childbirth and the costs of babies: evidence from spanish panel data.  
*Autores:* José M.<sup>a</sup> Labeaga, Ian Preston y Juan A. Sanchis-Llopis  
Páginas 56.
- 9/01 Imposición marginal efectiva sobre el factor trabajo: Breve nota metodológica y comparación internacional.  
*Autores:* Desiderio Romero Jordán y José Félix Sanz Sanz  
Páginas 40.
- 10/01 A non-parametric decomposition of redistribution into vertical and horizontal components.  
*Autores:* Irene Perrote, Juan Gabriel Rodríguez y Rafael Salas.  
Páginas 28.
- 11/01 Efectos sobre la renta disponible y el bienestar de la deducción por rentas ganadas en el IRPF.  
*Autora:* Nuria Badenes Plá.  
Páginas 28.
- 12/01 Seguros sanitarios y gasto público en España. Un modelo de microsimulación para las políticas de gastos fiscales en sanidad.  
*Autora:* Ángel López Nicolás.  
Páginas 40.
- 13/01 A complete parametrical class of redistribution and progressivity measures  
*Autores:* Isabel Rabadán y Rafael Salas.  
Páginas 20.
- 14/01 La medición de la desigualdad económica.  
*Autor:* Rafael Salas.  
Páginas 40.

- 15/01 Crecimiento económico y dinámica de distribución de la renta en las regiones de la UE: un análisis no paramétrico.  
*Autores:* Julián Ramajo Hernández y María del Mar Salinas Jiménez.  
Páginas 32.
- 16/01 La descentralización territorial de las prestaciones asistenciales: efectos sobre la igualdad.  
*Autores:* Luis Ayala Cañón, Rosa Martínez López y Jesus Ruiz-Huerta.  
Páginas 48.
- 17/01 Redistribution and labour supply.  
*Autores:* Jorge Onrubia, Rafael Salas y José Félix Sanz.  
Páginas 24.
- 18/01 Medición de la eficiencia técnica en la economía española: El papel de las infraestructuras productivas.  
*Autoras:* M.<sup>a</sup> Jesús Delgado Rodríguez e Inmaculada Álvarez Ayuso.  
Páginas 32.
- 19/01 Inversión pública eficiente e impuestos distorsionantes en un contexto de equilibrio general.  
*Autores:* José Manuel González-Páramo y Diego Martínez López.  
Páginas 28.
- 20/01 La incidencia distributiva del gasto público social. Análisis general y tratamiento específico de la incidencia distributiva entre grupos sociales y entre grupos de edad.  
*Autor:* Jorge Calero Martínez.  
Páginas 36.
- 21/01 Crisis cambiarias: Teoría y evidencia.  
*Autor:* Óscar Bajo Rubio.  
Páginas 32.
- 22/01 Distributive impact and evaluation of devolution proposals in Japanese local public finance.  
*Autores:* Kazuyuki Nakamura, Minoru Kunizaki and Masanori Tahira.  
Páginas 36.
- 23/01 El funcionamiento de los sistemas de garantía en el modelo de financiación autonómica.  
*Autor:* Alfonso Utrilla de la Hoz.  
Páginas 48.
- 24/01 Rendimiento de la educación en España: Nueva evidencia de las diferencias entre Hombres y Mujeres.  
*Autores:* M. Arrazola y J. de Hevia.  
Páginas 36.
- 25/01 Fecundidad y beneficios fiscales y sociales por descendientes.  
*Autora:* Anabel Zárate Marco.  
Páginas 52.
- 26/01 Estimación de precios sombra a partir del análisis Input-Output: Aplicación a la economía española.  
*Autora:* Guadalupe Souto Nieves.  
Páginas 56.
- 27/01 Análisis empírico de la depreciación del capital humano para el caso de las Mujeres y los Hombres en España.  
*Autores:* M. Arrazola y J. de Hevia.  
Páginas 28.

- 28/01 Equivalence scales in tax and transfer policies.  
*Autores:* Luis Ayala, Rosa Martínez y Jesús Ruiz-Huerta  
Páginas 44.
- 29/01 Un modelo de crecimiento con restricciones de demanda: el gasto público como amortiguador del desequilibrio externo.  
*Autora:* Belén Fernández Castro.  
Páginas 44.
- 30/01 A bi-stochastic nonparametric estimator.  
*Autores:* Juan G. Rodríguez and Rafael Salas.  
Páginas 24.

## 2002

- 1/02 Las cestas autonómicas.  
*Autores:* Alejandro Esteller, Jorge Navas y Pilar Sorribas.  
Páginas 72.
- 2/02 Evolución del endeudamiento autonómico entre 1985 y 1997: la incidencia de los Escenarios de Consolidación Presupuestaria y de los límites de la LOFCA.  
*Autores:* Julio López Laborda y Jaime Vallés Giménez.  
Páginas 60.
- 3/02 Optimal Pricing and Grant Policies for Museums.  
*Autores:* Juan Prieto Rodríguez y Víctor Fernández Blanco.  
Páginas 28.
- 4/02 El mercado financiero y el racionamiento del endeudamiento autonómico.  
*Autores:* Nuria Alcalde Fradejas y Jaime Vallés Giménez.  
Páginas 36.
- 5/02 Experimentos secuenciales en la gestión de los recursos comunes.  
*Autores:* Lluís Bru, Susana Cabrera, C. Monica Capra y Rosario Gomez.  
Páginas 32.
- 6/02 La eficiencia de la universidad medida a través de la función de distancia: Un análisis de las relaciones entre la docencia y la investigación.  
*Autores:* Alfredo Moreno Sáez y David Trillo del Pozo.  
Páginas 40.
- 7/02 Movilidad social y desigualdad económica.  
*Autores:* Juan Prieto-Rodríguez, Rafael Salas y Santiago Álvarez-García.  
Páginas 32.
- 8/02 Modelos BVAR: especificación, estimación e inferencia.  
*Autor:* Enrique M. Quilis.  
Páginas 44.