Papeles de Trabajo

NUEVAS MEDIDAS DE PRIVACIÓN Y DE SATISFACCIÓN RELATIVAS. EFECTO LOCAL Y GLOBAL DEL IMPUESTO LINEAL

Autores: *Luis José Imedio Olmedo*
Encarnación M. Parrado Gallardo
Universidad de Málaga

P.T. n.º 9/2011

N.I.P.O.: 602-11-036-9

INSTITUTO DE ESTUDIOS FISCALES

N. B.: Las opiniones expresadas en este documento son de la exclusiva responsabilidad de los autores, pudiendo no coincidir con las del Instituto de Estudios Fiscales.

Edita: Instituto de Estudios Fiscales
I. S. S. N.: 1578-0252
Depósito Legal: M-23772-2001

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo se contemplan distintas formas de realizar comparaciones entre individuos en términos de privación y/o satisfacción. Ello permite interpretar los índices absolutos de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini tanto como medidas de privación como de satisfacción social. Al utilizar diferentes criterios de ponderación al promediar la privación/satisfacción asociadas a cada nivel de renta se obtienen los elementos de la familia βA de medidas de desigualdad, o combinaciones lineales de ellos. En particular, los Gini generalizados (Yitzhaki, 1983) absolutos, los índices propuestos por Aaberge (2007) o los de Imedio y otros (2011) pueden ser utilizados para evaluar la privación o la satisfacción social de una distribución de rentas. También se analiza el efecto de la tarifa lineal tanto sobre las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o satisfacción, como sobre las medidas de desigualdad que proporcionan el valor medio, simple o ponderado, de esas funciones.

Palabras clave: Desigualdad, comparaciones interindividuales, medias ponderadas, familia β.

Clasificación JEL: C10, D31, I38.

ABSTRACT

This paper considers different ways of making comparisons between individuals in terms of deprivation and/or satisfaction. This allows the absolute Gini index, the absolute Bonferroni index and the absolute De Vergottini index to be interpreted as social deprivation measures as well as social satisfaction measures. The inequality measures that belong to the βA family, or linear combinations of them, are obtained when using different weighting schemes to average the deprivation and satisfaction associated with each income level. Particularly, the generalised Gini indices (Yitzhaki, 1983), the indices proposed by Aaberge (2007) or those proposed by Imedio et al. (2011) can be used to evaluate social deprivation or social satisfaction in an income distribution. It also examines the effect of the linear tax on both, the functions that assign to each income level its deprivation or satisfaction and the measures of inequality that provide the, simple or weighted, mean of these functions.

Keywords: Inequality, inter-individual comparisons, weighted means, β family, linear tax.

JEL codes: C10, D31, I38.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de privación surge como consecuencia de la desigualdad existente dentro de un grupo. Un individuo siente privación[1] al compararse con otros a quienes considera en mejor situación. En las distintas formulaciones que de este concepto se han propuesto en la literatura económica, se define la privación respecto a la variable renta, utilizada habitualmente para valorar la capacidad del individuo para poseer o adquirir bienes. Bajo este supuesto, es evidente la interrelación entre la privación experimentada por los individuos, o por la sociedad, y la desigualdad existente en la distribución de la renta.

Situados en ese contexto, es obligado citar los enfoques de Yitzhaki (1979) y de Hey y Lambert (1980), ambos equivalentes. Estos trabajos han servido de referencia para gran parte de las propuestas posteriores[2], por diversos motivos. En primer lugar, no sólo son pioneros en el tratamiento de esta cuestión, sino que parten de una definición muy intuitiva[3]. Identifican la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $z > x$, con la diferencia $z - x$. En segundo lugar, los resultados que derivan de ella permiten obtener funciones de bienestar social consistentes con el índice de Gini (1914). Introducen, además, el concepto de satisfacción relativa como contrapartida de la privación. Si el recorrido de la variable renta es el intervalo $[0, x_M]$, un individuo con renta x, $0 < x < x_M$, contempla una partición del mismo en dos intervalos: $(x, x_M]$, al que pertenecen las rentas mayores que la suya, respecto a las que siente privación, y $[0, x)$, al que pertenecen las rentas menores que la suya y respecto a las cuales está "satisfecho." Otra característica de interés en la formulación de Hey y Lambert (1980) es su modo de proceder: parten de la comparación entre individuos; obtienen, a continuación, la privación/satisfacción asociadas a cada nivel de renta y, por último, los valores sociales medios de ambas magnitudes[4].

La relación entre la privación, la satisfacción y la desigualdad permite que los índices de desigualdad puedan considerarse como medidas agregadas de los sentimientos de los individuos que se consideran desfavorecidos o favorecidos respecto a otros, en términos de renta (Temkin 1986, 1993). Algunos autores, Cowell y Ebert (2004), han utilizado esa relación para proporcionar una axiomática alternativa a la habitual sobre las medidas de desigualdad.

Existen, sin embargo, índices clásicos, como el de Bonferroni (1930) o el de De Vergottini (1940), poco estudiados desde este punto de vista[5]. Lo mismo sucede con algunas familias de índices propuestas en la última década. Es el caso de la familia introducida por Aaberge (2007), la de Imedio y otros (2011) o la clase β de medidas de desigualdad (Imedio y otros (2009a, 2009b)), que engloba a las anteriores[6] y a los Gini generalizados (Yitzhaki, 1983). Cada una de estas familias caracteriza la distribución de la renta, dada la renta media, y permite evaluar la desigualdad relativa según criterios distributivos muy dispares.

---

[1] Este concepto aparece inicialmente en trabajos encuadrados en el ámbito sociológico, tratando de justificar algunos aspectos del comportamiento de la sociedad: Stoufer y otros (1949), Davis (1959), Runciman (1966), Gurr (1968) y Crosby (1976, 1979). Desde el punto de vista económico, el enfoque que ha tenido mayor incidencia es el de Runciman (1966) debido a que sus enunciados son más precisos, lo que facilita su tratamiento analítico. Para este autor, un individuo se siente privado de Z si: (i) no tiene Z, (ii) algún individuo posee Z, (iii) quiere Z y (iv) considera factible tener Z.

[2] Otras aportaciones que se ocupan de la privación respecto de la variable renta son las de Yitzhaky (1982), Chakravarty y Chakraborty (1984), Berrebi y Silber (1985), Paul (1991), Chakravarty y otros (1995), Podder (1996), Chakravarty (1997), Chakravarty y Mukherjee (1998), Imedio y otros (1999), Ebert y Moyes (2000), Imedio y Bárcena (2003), Chakravarty (2007) y Magdalou y Moyes (2009).

[3] La idea se basa en la afirmación de Runciman (1966) acerca de la privación: *"…siendo su magnitud la cuantía de la diferencia entre la situación deseada y la situación del individuo que la desea*".

[4] En algunas propuestas, Berrebi y Silber (1985), se elude la primera etapa. A nuestro juicio, el hacer explícito el modo de realizar las comparaciones interindividuales es esencial en este tipo de formulaciones.

[5] En Bárcena e Imedio (2008) se hacen algunas consideraciones sobre ellos en ese aspecto.

[6] El único índice de los citados no perteneciente a β es el de De Vergotini.

El principal objetivo de este trabajo es proporcionar a los elementos de las familias citadas, o a sus respectivas funciones de bienestar, de una interpretación en términos de privación o de satisfacción[7] relativas.

En primer lugar, proponemos nuevas formulaciones al comparar la situación de dos individuos a partir de sus rentas en una distribución dada. Estas formulaciones deben tener en cuenta varios aspectos:

- La privación de un individuo, dado su nivel de renta, dependerá al menos de otros dos factores: el grupo al que pertenezca y del conjunto de individuos que tome como referencia al establecer comparaciones.
- En principio, existen muchas posibilidades al establecer cómo se realizan las comparaciones interindividuales, pero las definiciones correspondientes han de tener un significado claro, cumplir unas condiciones mínimas y ser comparables con las utilizadas en otros enfoques.
- El tratamiento analítico posterior ha de ser abordable.

Siguiendo este procedimiento, al calcular los valores medios de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación se obtienen índices de desigualdad específicos.

En segundo lugar, al determinar la privación/satisfacción social, cabe la posibilidad de utilizar ponderaciones que discriminen entre los distintos tramos de la distribución, asignando distinto peso a la privación asociada a cada uno de sus niveles de renta. Es decir, al igual que en la medición de la desigualdad cada índice incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en la distribución, según los juicios de valor que subyacen en él, también al evaluar la privación/satisfacción media de la sociedad se pueden adoptar diferentes actitudes, mediante el uso de ponderaciones. En particular, si estas ponderaciones dependen de parámetros, al variar sus valores se podrán obtener distintas familias de medidas de desigualdad.

En este trabajo también se aborda una cuestión poco tratada en la literatura, el efecto que los impuestos sobre la renta tienen en la privación. El análisis se realiza para las nuevas funciones e índices de privación y satisfacción. Aunque este estudio se podría plantear para una tarifa genérica, como en Imedio, Parrado y Sarrión (1999), lo centraremos en los impuestos lineales, debido a dos motivos. El impuesto lineal sobre la renta o estructuras tendentes a la linealización (los impuestos reales son lineales por tramos con tipos marginales crecientes al pasar de un tramo al siguiente) son alternativas fiscales que, de forma recurrente, se vienen planteando desde hace décadas. Por otra parte, la estructura de la tarifa lineal permite tanto el tratamiento analítico del problema, como la obtención de resultados muy precisos.

El trabajo se desarrolla según el siguiente esquema. En la sección segunda se introduce el marco de análisis, algunos índices clásicos y la familia β de medidas de desigualdad. Se citan algunas de sus características estadísticas y normativas. La sección tercera incluye distintas definiciones de la privación entre individuos, en función del grupo con el que se identifiquen y del que consideren al realizar las comparaciones. En la sección cuarta se obtienen los índices de la familia β a partir de las medias ponderadas de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación. El efecto de las tarifas lineales sobre las magnitudes objeto de estudio se realiza en la sección quinta. Tras una ilustración empírica, se incluyen unas breves conclusiones.

2. ALGUNAS MEDIDAS DE DESIGUALDAD

La renta está representada por la variable aleatoria X, cuyo dominio, $[0, x_M]$, está contenido en la semirrecta real positiva, $R_0^+ = [0, \infty)$. Notamos por $F(\cdot)$ a su función de distribución[8] y por $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ a su renta media.

[7] En ocasiones, para no ser reiterativos en el empleo de ambos términos, al hablar de privación nos estaremos refiriendo también a la satisfacción.

La curva de Lorenz de F, L(.), se define mediante:

$$L:[0,1]\to[0,1]\ ,\ L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^x sdF(s)\ ,\ 0\le p\le 1\ , \qquad [1]$$

Para cada $p=F(x)$, L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que $L(p)\le p,\ 0\le p\le 1.$ En caso de equidistribución es $L(p)=p,$ mientras que si la concentración es máxima, $L(p)=0$ si $0\le p<1$ y $L(1)=1.$ La curva de Lorenz es no decreciente y convexa.

2.1. Los índices de Gini, Bonferroni y De Vergottini

Una transformación de la curva de Lorenz da lugar a otra representación gráfica de la desigualdad, la curva de Bonferroni (1930), B(·). Se define como[9]:

$$B:[0,1]\to[0,1]\ ,\ B(p)=\begin{cases}\dfrac{L(p)}{p}\ ,0<p\le 1,\\ 0\ ,\ p=0.\end{cases} \qquad [2]$$

Se verifica $B(p)\le 1,\ \ 0\le p\le 1.$ Para una distribución igualitaria se tiene que $B(p)=1,\ \ 0\le p\le 1,$ mientras que cuando la concentración es máxima, $B(p)=0$ si $0\le p<1$ y $B(1)=1.$ Para cualquier distribución, la curva B(p) es no decreciente. Su concavidad/convexidad depende de la forma de la distribución.

De Vergottini (1940) utiliza para representar la desigualdad la función V(·), dada por:

$$V:[0,1]\to R\ ,\ V(p)=\begin{cases}\dfrac{1-L(p)}{1-p}\ ,0\le p<1,\\ \dfrac{x_M}{\mu}\ ,\ p=1.\end{cases} \qquad [3]$$

Es inmediato que $V(p)\ge 1,\ \ 0\le p\le 1.$ En caso de equidistribución es $V(p)=1,\ \ 0\le p<1$, mientras que si la concentración es máxima, $V(p)=1/(1-p),\ \ 0\le p<1$. La función V(·) es también no decreciente y, al igual que $B(\cdot)$, su concavidad/convexidad depende de la forma de la distribución.

Los valores de las funciones B(·) y V(·) son medias condicionadas relativas. En efecto, dado un nivel de renta $x\in[0,x_M]$, si $p=F(x)$, las rentas medias de las distribuciones truncadas que resultan al restringir la variable X a los intervalos $[0,x]$ y $[x,x_M]$, respectivamente, vienen dadas por[10]:

$$m(x)=E(X/X\le x)=\frac{1}{F(x)}\int_0^x sdF(s)=\mu\frac{L(p)}{p}=\mu B(p)\ ,$$

$$M(x)=E(X/X\ge x)=\frac{1}{1-F(x)}\int_x^{x_M} sdF(s)=\mu\frac{1-L(p)}{1-p}=\mu V(p)\ .$$

Como consecuencia, si $p=F(x)$ es la proporción de unidades cuya renta es menor (resp. mayor) o igual que x, B(p) (resp. V(p)) es el cociente entre la renta media de ese grupo y la media de la pobla-

8 En ocasiones, para facilitar la obtención de resultados teóricos, se supondrá la continuidad de F . En tal caso, $f(x)=F'(x)$ es la función de densidad de la distribución.

9 En la siguiente expresión, si la renta mínima es $x_0>0,$ entonces $B(0)=\lim_{x\to 0^+}(L(p)/p)=L'(0^+)=x_0/\mu$.

10 Sus funciones de distribución son: $F_{(0,x]}(z)=F(z)/F(x)\ ,\ 0<z\le x,\ \ F_{[x,x_M]}(z)=((F(z)-F(x))/(1-F(x)),\ \ z\ge x.$

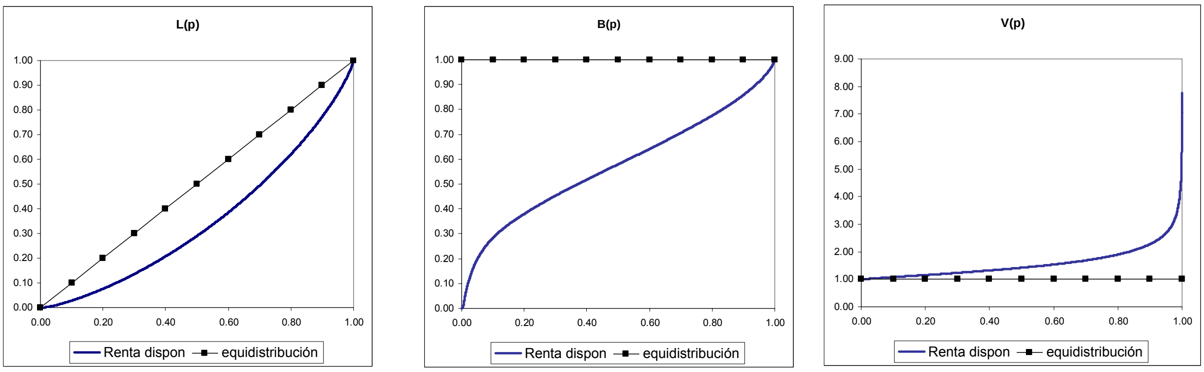
ción. Por ejemplo, fijada una línea de pobreza, z, si $p_z = F(z)$ es la proporción de pobres, B(pz) (resp. V(pz)) es la renta media de los pobres (resp. no pobres) expresada como fracción de la renta media de la población.

Las curvas de Bonferroni y de De Vergottini, al igual que la de Lorenz, proporcionan una representación gráfica de la desigualdad y aunque cada una de ellas queda determinada por cualquiera de las otras dos, la información que ofrecen es diferente. Los valores de L(p) son participaciones en la renta total, mientras que los de B(p) y V(p) se refieren a niveles relativos de renta.

La Figura 1 muestra las gráficas de las curvas L(p), B(p) y V(p) asociadas a la distribución de renta disponible en España para 2007, utilizando los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

Figura 1

CURVA DE LORENZ, L(p), CURVA DE BONFERRONI, B(p) Y CURVA DE DE VERGOTTINI, V(p)



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

A partir de cada una de las curvas anteriores se definen índices de desigualdad asociados a ellas. El coeficiente de Gini (1914), G, se define a través de la curva de Lorenz, L(·), mediante la expresión:

$$G = 2\int_0^1 (p - L(p))dp = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp. \qquad [4]$$

Las curvas B(·) y V(·) permiten definir los índices de Bonferroni (1930), B, y de De Vergottini (1940), V, respectivamente. Sus expresiones son:

$$B = 1 - \int_0^1 B(p)dp = 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^{x_M} m(x)dF(x). \qquad [5]$$

$$V = \int_0^1 V(p)dp - 1 = \frac{1}{\mu}\int_0^{x_M} M(x)dF(x) - 1. \qquad [6]$$

La interpretación de los tres índices en términos de áreas es inmediata a partir de sus expresiones. Los índices G y B son coeficientes normalizados, cuyos valores pertenecen al intervalo $[0,1]$, siendo $G = B = 0$ si existe equidistribución y $G = B = 1$, si la concentración es máxima. El índice V también es nulo si la distribución es igualitaria, pero no está acotado superiormente[11].

En Imedio y otros (2009c), se realiza un análisis comparativo de estos tres índices desde el punto de vista estadístico y normativo. Son medidas que presentan un conjunto de características comunes y una clara analogía formal, pero que incorporan juicios de valor diferentes y, en cierto modo, comple-

[11] No existe una cota superior válida para cualquier distribución de renta. Para una distribución dada cuya renta máxima sea x_M, $V \in [0,(x_M/\mu) - 1]$.

mentarios en la medición de la desigualdad y del bienestar. Interesa destacar que G, B y V son índices relativos de desigualdad, mientras que μG, μB y μV son índices absolutos. Son, por lo tanto, índices de compromiso[12]. Por otra parte, cada índice incorpora un criterio diferente al agregar la información contenida en la distribución. Las tres medidas presentan aversión a la desigualdad o preferencia por la igualdad[13], pero mientras que B centra su interés en la cola izquierda de la distribución y acusa en mayor medida aquellos cambios que afectan de forma preferente a las rentas bajas, el índice V incorpora el criterio contrario. En el índice de Gini subyace una postura intermedia entre ambas.

2.2. La clase β de medidas de desigualdad

En Imedio y otros (2009a, 2009b) se propone y analiza una clase de medidas de desigualdad, a la que pertenecen índices de uso habitual, como los de Gini (1914) y Bonferroni (1930) e incluye, como casos particulares, familias conocidas en la literatura, como los Gini generalizados (Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)) o las propuestas más recientemente en Aaberge (2007) e Imedio y otros (2011).

Los elementos de esta clase se expresan como medias ponderadas de la desigualdad local acumulada hasta cada percentil de renta, evaluando esa desigualdad mediante la función $1-B(p)=(p-L(p))/p$, $0<p\leq 1$, resultado de comparar la curva de Bonferroni de la distribución vigente con la correspondiente al caso de equidistribución ($B(p)=1$, $0\leq p\leq 1$). Se utilizan como ponderaciones las funciones de densidad de las distribuciones beta definidas sobre el intervalo $[0,1]$:

$$\omega_{(s,t)}:[0,1]\to R^{+},\ \omega_{(s,t)}(p)=(B(s,t))^{-1}p^{s-1}(1-p)^{t-1}, s>0, t>0\,, \qquad [7]$$

siendo B(s,t) la función beta de Euler.

Por lo tanto, para cada par de números reales positivos $(s,t)\in R^{+}\times R^{+}$, el índice de desigualdad I(s,t) viene dado por:

$$I(s,t)=(B(s,t))^{-1}\int_0^1 (1-B(p))p^{s-1}(1-p)^{t-1}dp\,. \qquad [8]$$

Cuando la desigualdad local se mide a partir de las diferencias de Lorenz, $p-L(p)=p(1-B(p))$, una expresión equivalente de los índices es:

$$I(s,t)=(B(s,t))^{-1}\int_0^1 (p-L(p))p^{s-2}(1-p)^{t-1}dp\,. \qquad [9]$$

El conjunto biparamétrico $\beta=\{I(s,t)\}_{s,t>0}$ es la clase beta de medidas de desigualdad.

Es inmediato que para cada $(s,t)\in R^{+}\times R^{+}$, $I(s,t)$ es un índice relativo de desigualdad, siendo $I(s,t)=0$ si existe equidistribución e $I(s,t)=1$ si la concentración es máxima. A la vez, $\mu I(s,t)$ es una medida absoluta, por lo que $I(s,t)$ es un índice de compromiso. Por lo tanto, $\beta_A=\{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$ es una familia de medidas absolutas de desigualdad.

La clase β incorpora un conjunto muy amplio de criterios con relación a la importancia que el evaluador puede asignar a la desigualdad local acumulada en los diferentes tramos de la distribución. Estos

[12] Un índice relativo (invariante frente a cambios proporcionales), I, es de compromiso si μI es un índice absoluto (invariante frente a cambios de origen). Un índice absoluto, J, es de compromiso si J/μ es un índice relativo (Blackorby y Donaldson, 1978).

[13] Un índice presenta aversión a la desigualdad si verifica el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Es decir, si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el valor del índice disminuye. El índice B presenta una aversión a la desigualdad mayor que la de G. Su uso es adecuado si el interés se centra en la cola izquierda de la distribución (Nygard y Sandström, 1981). Por el contrario, V asigna más peso a la cola derecha de la distribución y su aversión a la desigualdad es menor que la de G.

criterios son consecuencia de la gran variedad de formas de la función $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, según los valores de los parámetros s y t. Se tiene:

(i) Si $0 < s < 1$, $0 < t < 1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ tiene forma de U, siendo simétrica para $s = t$, y alcanza su valor mínimo en $p = (s-1)/(s+t-2)$.

(ii) Si $0 < s < 1$, $t \geq 1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es decreciente y convexa.

(iii) Si $s \geq 1$, $0 < t < 1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es creciente y convexa.

(iv) Si $s = 1$ (resp. $t = 1$), $t \geq 1$ (resp. $s \geq 1$), $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es decreciente (resp. creciente), siendo $\omega_{(s,t)}(\cdot) = 1$.

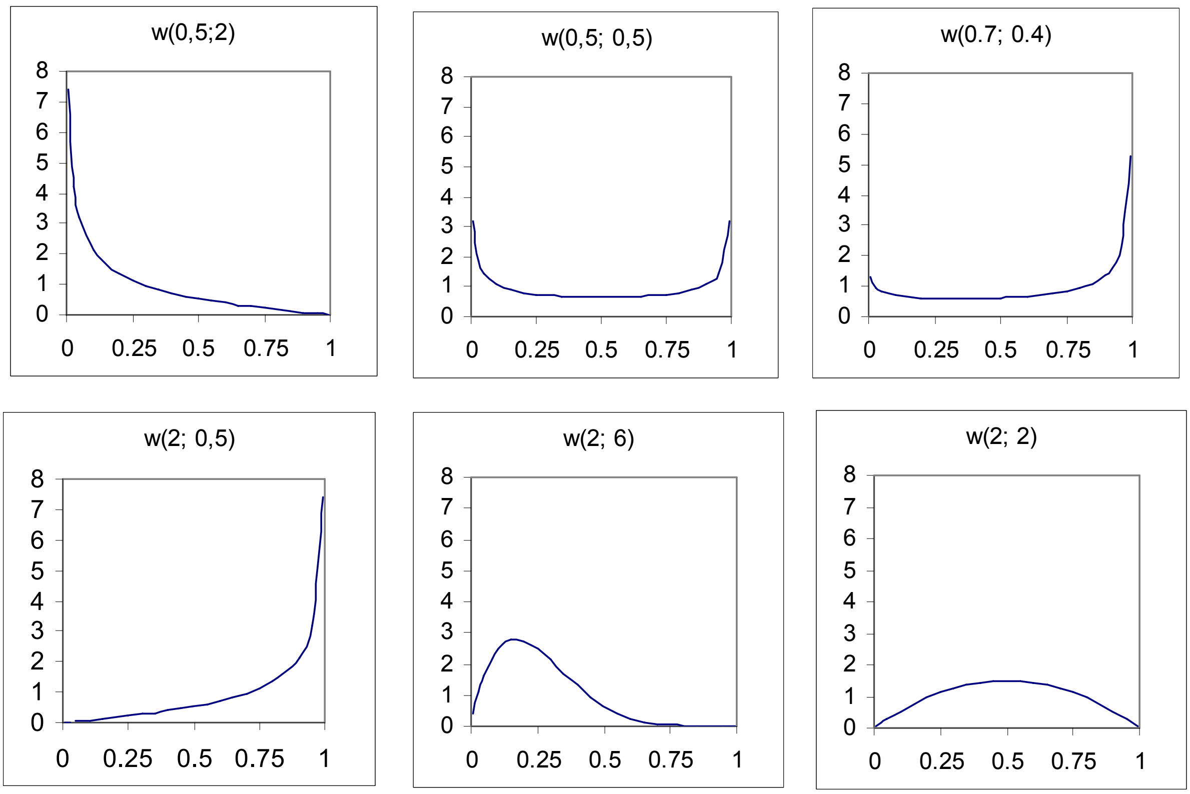
(v) Si $s > 1$, $t > 1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es campaniforme, simétrica si $s = t$, alcanzando en $p = (s-1)/(s+t-2)$ su valor máximo.

Por lo tanto, en el caso (i) se pondera en menor medida la desigualdad acumulada en la parte intermedia de la distribución, tanto más centrada cuanto mayores y más próximos entre sí sean los valores de s y t, y en mayor medida sus extremos. En el caso (v) las ponderaciones siguen el criterio contrario: se asigna mayor peso a la parte intermedia y menor peso a los extremos. En los demás casos, excepto $s = t = 1$, la mayor ponderación se asigna a la desigualdad local existente en una de las colas de la distribución.

En la Figura 2 se representan algunas de las funciones $\omega_{(s,t)}$ para diferentes valores de sus parámetros.

Figura 2

FUNCIONES $\omega_{(s,t)}$



La clase β contiene no sólo índices conocidos, sino también familias de medidas de desigualdad habituales en la literatura. Para $(s,t)=(1,1)$ y $(s,t)=(2,1)$ se obtienen los coeficientes de Bonferroni (1930), B, y de Gini (1914), G, respectivamente:

$$I(1,1)=\int_0^1 (1-B(p))dp = B\,,$$

$$I(2,1)=2\int_0^1 (p-L(p))dp = G\,.$$

Para $s=2$ resulta la familia de los índices de Gini Generalizados ((Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)), $\gamma=\{I(2,t)\}_{t>0}$, siendo

$$I(2,t)=t(t+1)\int_0^1 (1-B(p))p(1-p)^{t-1}dp = t(t+1)\int_0^1 (p-L(p))(1-p)^{t-1}dp =$$

$$=1-t(t+1)\int_0^1 (1-p)^{t-1}L(p)dp\,,\ t>0. \qquad [10]$$

Si $t=1$ y $s\in N=\{1,2,...\}$ es un entero positivo, se obtiene la familia numerable $\alpha=\{I(s,1)\}_{s\in N}$ definida en Aaberge (2007). Sus elementos se expresan como:

$$I(s,1)=s\int_0^1 (1-B(p))p^{s-1}dp = s\int_0^1 (p-L(p))p^{s-2}dp = 1-s\int_0^1 p^{s-2}L(p)dp\,,\ s>0. \qquad [11]$$

Para $s=1$ y $t\in N$, resulta la familia $\delta=\{I(1,t)\}_{t\in N}$ propuesta por Imedio y otros (2011), cuyos elementos son:

$$I(1,t)=t\int_0^1 (1-B(p))(1-p)^{t-1}dp = t\int_0^1 (p-L(p))p^{-1}(1-p)^{t-1}dp = 1-t\int_0^1 (1-p)^{t-1}B(p)dp, t>0\ .[12]$$

En el ámbito normativo, hay que señalar que con los elementos de β queda cubierto todo el espectro de la aversión a la desigualdad, desde la aversión máxima (máxima concavidad de la distribución de preferencias o leximin rawlsiano[14]) a la indiferencia (distribución de preferencias lineal, concavidad nula). En particular, en la familia α al aumentar el valor de su parámetro, sus índices presentan una aversión a la desigualdad decreciente y asignan un peso cada vez menor a las rentas bajas[15]. Sucede lo contrario con las familias δ y γ. En ellas los índices incorporan una aversión creciente a la desigualdad, centrando cada vez más su interés en la cola izquierda de la distribución, al aumentar el valor del parámetro.

3. ALGUNAS DEFINICIONES DE PRIVACIÓN Y SATISFACCIÓN RELATIVAS

Como ya se ha señalado, parece razonable que la privación de un individuo, dado su nivel de renta, dependa del conjunto de individuos que tome como referencia al establecer comparaciones y/o del grupo con el que se identifique. En función del primer aspecto, distinguimos dos situaciones, según que cada individuo considere, como ámbito de comparación, toda la distribución o se limite a un truncamiento de la misma.

[14] Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Entre dos distribuciones prefiere aquella cuya renta mínima es mayor o, en caso de igualdad, aquella en que la renta mínima presente menor frecuencia. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

[15] En Imedio y Bárcena (2007) se estudia esta cuestión con detalle, comparando el comportamiento, en ese contexto, de las familias α y γ.

3.1. Los individuos contemplan toda la distribución al comparar su situación con la de otros

En este caso cada individuo compara su renta con todas y cada una de las del intervalo $[0, x_M]$.

En las definiciones que siguen, tanto la privación como la satisfacción entre individuos se identifican con la diferencia entre sus rentas[16].

Definición 1

a) (Yitzhaki (1979), Hey y Lambert (1980)). La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $P_1(x,z)$, viene dada por

$$P_1(x,z) = \begin{cases} z - x, & \text{si } z > x \\ 0, & \text{si } z \leq x. \end{cases}$$

b) (Hey y Lambert, 1980). De forma simétrica, la satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $S_1(x,z)$, viene dada por

$$S_1(x,z) = \begin{cases} x - z, & \text{si } x > z \\ 0, & \text{si } x \leq z. \end{cases}$$

Es decir, la privación (satisfacción) de un individuo con un determinado nivel de renta respecto a quien tiene una renta mayor (menor) viene dada por la diferencia de rentas, y es nula respecto a quienes tienen rentas inferiores (superiores).

Proposición 1. Los valores medios de la privación y de la satisfacción asociadas al nivel de renta x, $P_1(x)$ y $S_1(x)$, respectivamente, son[17]:

$$P_1(x) = \int_0^{x_M} P_1(x,z)dF(z) = (1 - F(x))(M(x) - x),$$

$$S_1(x) = \int_0^{x_M} S_1(x,z)dF(z) = F(x)(x - m(x)),$$

siendo M(x) (resp. m(x)) la renta media del conjunto de individuos con renta mayor o igual (resp. menor o igual) que x.

Por lo tanto, P1(x) es el producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre la renta media de ese grupo y x, mientras que S1(x) es el producto de la proporción de individuos con renta menor o igual que x y de la diferencia entre x y la renta media de ese grupo.

Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

$P_1(\cdot)$ es una función estrictamente decreciente del nivel de renta. [i]

$S_1(\cdot)$ es una función estrictamente creciente. [ii]

$P_1(0) = \mu \quad P_R(x_M) = 0$ [iii]

$S_1(0) = 0 \quad S_1(x_M) = x_M - \mu$ [iv]

Se verifica $S_1(x) - P_1(x) = x - \mu$, $x > 0$. Por lo tanto, $S_1(\mu) = P_1(\mu)$. Es decir, las funciones $P_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)$ se cortan en la renta media, de manera que para rentas inferiores a la media, la privación es mayor que la satisfacción. Sucede lo contrario para las rentas mayores que la media.

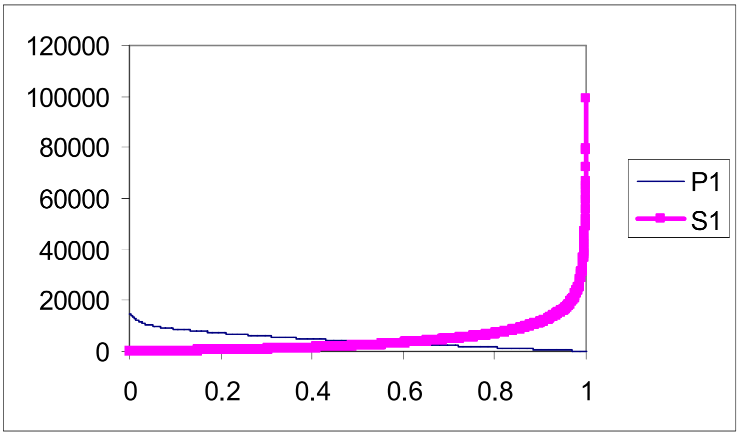
[16] Si el interés de los individuos se centra en el status, más que en su nivel de renta, lo relevante sería el rango que ésta les asigna en la distribución. Este punto de vista se aborda en Imedio y Bárcena (2003).

[17] Las demostraciones de los resultados que se enuncian en este trabajo están a disposición de quienes los soliciten a los autores.

En el siguiente gráfico se representan las funciones $P_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)$, tomando como variable independiente $p = F(x)$, correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 3

$P_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)$



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

Las funciones de privación y de satisfacción relativas se cortan en $p = 0.59$, percentil correspondiente a la renta media de la distribución, $\mu = 15199$ euros.

Proposición 2. Los valores medios de la privación y de la satisfacción para el conjunto de la sociedad coinciden ambos con el índice absoluto de Gini, μG, de la distribución de rentas.

$$E(P_1(X)) = \int_0^{x_M} P_1(x)dF(x) = \mu G,$$

$$E(S_1(X)) = \int_0^{x_M} S_1(x)dF(x) = \mu G.$$

En este caso, al considerar el conjunto de la sociedad, privación y satisfacción quedan compensadas.

Supongamos ahora que un individuo con renta x, al experimentar privación respecto a las rentas mayores que la suya, las del intervalo $(x, x_M]$, se considera miembro del conjunto de individuos cuya renta es menor o igual que x, las del intervalo $[0, x]$, e identifica su situación con la renta media del mismo[18], $m(x)$. Esta postura, y su simétrica en el caso de la satisfacción, darían lugar a la siguiente definición.

Definición 2

a) (Bárcena e Imedio, 2008) La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $P_2(x,z)$, viene dada por

$$P_2(x,z) = \begin{cases} z - m(x), & \text{si } z > x \\ 0, & \text{si } z \le x. \end{cases}$$

[18] En la Definición 1, el individuo considera que su situación queda determinada por su nivel de renta. Ahora, un individuo cuya renta, x, no sea la mínima, siente una especie de altruismo en el sentido de que se identifica con quienes están en peor situación (a través de su renta media), lo que aumenta su privación respecto a la expresada en la definición anterior.

b) La satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $S_2(x,z)$, viene dada por

$$S_2(x,z)=\begin{cases}M(x)-z, & \text{si } z<x\\ 0, & \text{si } z\geq x.\end{cases}$$

Proposición 3. A partir de la definición anterior, la privación y la satisfacción medias asociadas al nivel de renta x son:

$$P_2(x)=\int_0^{x_M}P_2(x,z)dF(z)=(1-F(x))(M(x)-m(x))=\mu-m(x)\,.$$

$$S_2(x)=\int_0^{x_M}S_2(x,z)dF(z)=F(x)(M(x)-m(x))=M(x)-\mu\,.$$

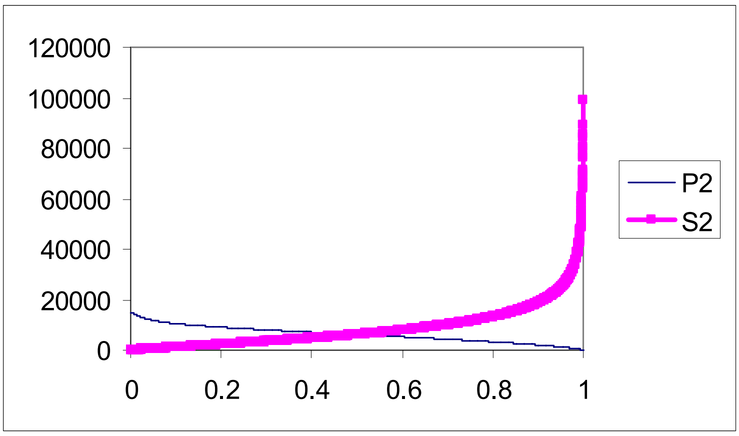
Es decir, $P_2(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre las rentas medias de los intervalos $[x,x_M]$ y $[0,x]$. De forma más breve, $P_2(x)$ es la diferencia entre la renta media de la población y la renta media del conjunto de individuos con renta menor que x. Para todo $x>0$, $P_2(x)\geq P_1(x)$. Por su parte, $S_2(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta menor o igual que x y de la diferencia entre las rentas medias de los intervalos $[x,x_M]$ y $[0,x]$, lo que coincide con la diferencia entre la renta media de los individuos con renta mayor x y la renta media de la población. Para todo $x>0$, $S_2(x)\geq S_1(x)$.

Las funciones $P_2(\cdot)$ y $S_2(\cdot)$ satisfacen las mismas propiedades que en la formulación anterior. En este caso, ambas funciones se cortan en la renta mediana (Me), $F(Me)=0.5$. Se cumple: $P_2(Me)=S_2(Me)=\mu-2L(0.5)$. Para las rentas inferiores a la mediana, la privación es mayor que la satisfacción y sucede lo contrario para las rentas mayores que la mediana.

En el siguiente gráfico se representan las funciones $P_2(\cdot)$ y $S_2(\cdot)$, correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 4

$P_2(\cdot)$ y $S_2(\cdot)$,



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

Las funciones de privación y de satisfacción relativas se cortan en $p=0.5$, percentil correspondiente a la renta mediana de la distribución, $Me=12979$ euros.

Proposición 4. La privación media para el conjunto de la población viene dada por el índice absoluto de Bonferroni, mientras que la satisfacción media de la población coincide con el índice absoluto de De Vergottini. Es decir:

$$E(P_2(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (\mu - m(x)dF(x) = \mu\left(1 - \int_0^1 \frac{L(p)}{p}dp\right) = \mu B .$$

$$E(S_2(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (M(x) - \mu)dF(x) = \mu\left(\int_0^1 \frac{1 - L(p)}{1 - p}dp - 1\right) = \mu V .$$

En este caso, excepto si la distribución es igualitaria, $E(P_2(X)) \neq E(S_2(X))$. Se verifica $E(P_2(X)) \geq E(P_1(X))$ y $E(S_2(X)) \geq E(S_1(X))$.

En las dos definiciones anteriores los individuos, al comparar su nivel de renta con el de los demás, contemplan la distribución de la renta en su totalidad. Al evaluar su privación (resp. satisfacción), el individuo considera a quienes tienen una renta menor (resp. mayor) que la suya aunque su privación (resp. satisfacción) hacia ellos sea nula.

3.2. Los individuos truncan la distribución al comparar su situación con la de otros

También cabe la posibilidad de que los individuos, a la hora de valorar su privación, ignoren a quienes tienen rentas menores que la suya, comparándose únicamente con quienes tienen una renta mayor. El individuo con renta x, sólo se compara con los individuos cuyas rentas pertenecen al intervalo $(x, x_M]$. En otros términos, el individuo "no mira hacia atrás". Este modo de proceder equivale formalmente a considerar la distribución truncada a la izquierda que determina cada nivel de renta. Al formular la satisfacción se ignora a quienes tienen rentas mayores que la propia, comparándose sólo con quienes tienen una renta menor, considerando la distribución truncada a la derecha.

Estas actitudes por parte de los individuos darían lugar a la definición siguiente.

Definición 3

a) (Bárcena e Imedio, 2008) La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $z > x$, viene dada por

$$P_3(x, z) = z - x , z \geq x .$$

b) La satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $z > x$, es

$$S_3(x, z) = x - z , z \leq x .$$

Por lo tanto, fijado x, $P_3(x, z)$ sólo está definida en el intervalo de renta $[x, x_M]$ mientras que $S_3(x, z)$ lo está en $[0, x]$.

Para obtener la privación y la satisfacción medias asociadas al nivel de renta x, habrá que considerar las distribuciones truncadas que resultan al restringir la variable renta a los intervalos $[x, x_M]$ y $[0, x]$, respectivamente.

Proposición 5. Las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación y su satisfacción, vienen dadas por:

$$P_3(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \int_x^{x_M} P_3(x, z)dF(z) = M(x) - x ,$$

$$S_3(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{x_m}^{x} S_3(x, z)dF(z) = x - m(x) .$$

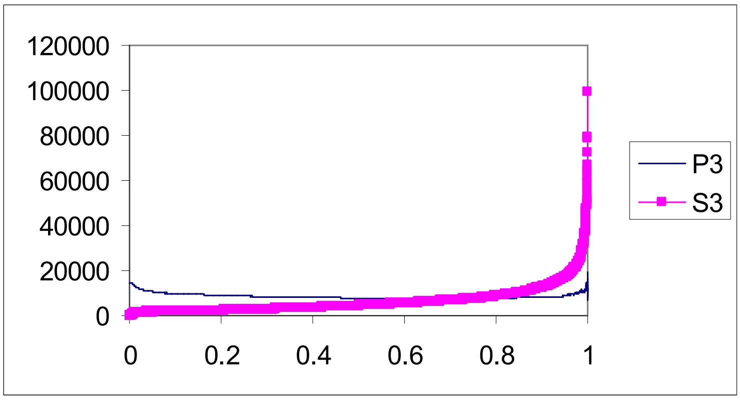
Es decir, P3(x) es la diferencia entre la renta media del intervalo [x, xM] y x, y S3(x) es la diferencia entre x y la renta media del intervalo [0, x].

Al contemplar la población total, tanto la privación como la satisfacción asociadas a cada nivel de renta son menores que las obtenidas al truncar la distribución. Ello es consecuencia de que en el primer caso ambas magnitudes son nulas en un tramo de la distribución, mientras que en el segundo, al prescindir de ese tramo, son siempre positivas.

Las funciones $P_3(\cdot)$ y $S_3(\cdot)$ verifican, como en los casos anteriores, las propiedades (iii) e (iv), pero no son, en general, funciones monótonas de la renta. Su comportamiento, a este respecto, depende de las características de cada distribución de rentas[19]. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones $P_3(\cdot)$ y $S_3(\cdot)$, correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 5

$P_3(\cdot)$ y $S_3(\cdot)$



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

$S_3(\cdot)$ es creciente a lo largo de la escala de rentas. $P_3(\cdot)$ es decreciente hasta aproximadamente el percentil 85, a partir del cual presenta ligeras oscilaciones hasta anularse en la renta máxima. Ambas funciones se cortan cerca del tercer cuartil, en $p = 0.748$, que corresponde a una renta de 18447 euros.

Los valores medios de P3(·) y S3(·) son índices absolutos de desigualdad, como queda recogido en la siguiente proposición.

Proposición 6. La privación media de la sociedad coincide con el índice absoluto de De Vergottini, mientras que la satisfacción social media es el índice absoluto de Bonferroni.

$$E(P_3(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (M(x) - x)dF(x) = \mu\left(\int_0^1 \frac{1 - L(p)}{1 - p}dp - 1\right) = \mu V\,.$$

$$E(S_3(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (x - m(x))dF(x) = \mu\left(1 - \int_0^1 \frac{L(p)}{p}dp - 1\right) = \mu B\,.$$

Las formulaciones anteriores, en las que las comparaciones entre individuos se realizan en términos de diferencias de renta, permiten interpretar cada uno de los tres índices absolutos μG, μB y μV tanto

[19] Por ejemplo, para una distribución uniforme en $[0, x_M]$, $M(x) - x = (x_M - x)/2$ es estrictamente decreciente, mientras que $x - m(x) = x/2$ es estrictamente creciente. Sin embargo, para la distribución $F(x) = (x/x_M)^{1/2}$, $M(x) - x$ presenta un máximo relativo en $p = 1/4$, $p = F(x)$, y es decreciente para $p > 1/4$. La función $x - m(x)$ es creciente.

como medidas de la privación media de una población, como medidas de su satisfacción, dependiendo de la definición utilizada. Esto es:

- El índice absoluto de Gini, μG, proporciona tanto la privación como la satisfacción social media cuando los individuos contemplan toda la distribución y no se identifican con ningún grupo.
- El índice absoluto de Bonferroni, μB, se obtiene como índice de privación social cuando los individuos se identifican con quienes tienen renta menor que la suya. Y es una medida de satisfacción social cuando los individuos truncan la distribución e ignoran a quienes tienen rentas mayores que la propia.
- El índice absoluto de De Vergottini, μV, es una medida de privación social cuando los individuos truncan la distribución e ignoran a quienes tienen rentas menores que la suya, mientras que es una medida de satisfacción social cuando los individuos se identifican con quienes tienen rentas mayores que la suya.

Por otra parte, las funciones de privación relativa y sus valores medios permiten obtener funciones de bienestar social (FBS) consistentes con los índices de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini. Para ello, se definen funciones de utilidad lineales en la renta restando la desutilidad derivada de la privación; es decir:

$$U(x,F) = ax - bP(x), a > 0, b > 0 .$$

La utilidad media o bienestar asociado a la distribución es

$$W = \int_0^{x_M} U(x,F(x))dF(x) = a\mu - bE(P(X)) .$$

En particular, cuando la privación social deriva de las definiciones anteriores, resultan las FBSs consistentes[20] con los índices citados:

$$W_1 = \mu(a - bG)$$

$$W_2 = \mu(a - bB)$$

$$W_3 = \mu(a - bV)$$

Si $a = b = 1$, resultan las rentas equivalentes de equidistribución asociadas a G, B y V, respectivamente.

4. LA PRIVACIÓN Y LA SATISFACCIÓN PONDERADAS. NUEVOS ÍNDICES

Las medidas de privación y de satisfacción social obtenidas en la sección anterior son los valores esperados de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o su satisfacción. Cabe la posibilidad de que el evaluador social al agregar estas magnitudes a lo largo de la distribución quiera discriminar entre los distintos tramos de la misma, asignándoles diferentes pesos. Esto se consigue calculando los valores sociales medios de las magnitudes estudiadas a través de medias ponderadas, utilizando distintos esquemas de ponderación. Al considerar una familia de ponderaciones, dependiente de parámetros reales, se obtienen distintas valoraciones de la privación o de la satisfacción, al variar dichos parámetros.

En particular, con la familia de ponderaciones dada por la expresión [7],

$$\omega_{(s,t)} : [0,1] \to R^+, \ \omega_{(s,t)}(p) = (B(s,t))^{-1} p^{s-1}(1-p)^{t-1}, s > 0, t > 0 ,$$

las medias ponderadas de las funciones de privación y de satisfacción, obtenidas en la sección anterior, se expresan a partir de combinaciones lineales de los elementos de la familia $\beta_A = \{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$, dándoles una interpretación ética en estos términos.

[20] Una FBS, W, es consistente con el índice de desigualdad I si para dos distribuciones cualesquiera F y G, con la misma renta media, se verifica $I(F) \le I(G) \Leftrightarrow W(F) \ge W(G)$.

Proposición 7. Si las funciones que asignan a cada renta su privación o su satisfacción media, al contemplar las distintas definiciones de la sección anterior, se ponderan con $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, se obtiene:

$$E_\omega(P_1(X)) = \int_0^{x_M} P_1(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = \frac{\mu}{s+t}[s(t+1)I(s+1,t)-(s-1)tI(s,t+1)] \qquad [13]$$

$$E_\omega(S_1(X)) = \int_0^{x_M} S_1(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = \frac{s(s+1)}{s+t}\mu[I(s+1,t)-I(s+2,t-1)],\ t>1. \qquad [14]$$

Para $t=1$ resulta $E_\omega(S_1(X)) = s\mu I(s+1,1)$.

$$E_\omega(P_2(X)) = \int_0^{x_M} P_2(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = \mu I(s,t)\,. \qquad [15]$$

$$E_\omega(S_2(X)) = \int_0^{x_M} S_2(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = \frac{s}{t-1}\mu I(s+1,t-1),\ t>1. \qquad [16]$$

$$E_\omega(P_3(X)) = \int_0^{x_M} P_3(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = \frac{st}{t-1}\mu I(s+1,t-1)-\mu(s-1)I(s,t),\ t>1. \qquad [17]$$

$$E_\omega(S_3(X)) = \int_0^{x_M} S_3(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x) = s\mu[I(s,t)-I(s+1,t-1)],\ t>1. \qquad [18]$$

Si $t=1$, $E_\omega(S_3(X)) = s\mu I(s,1)$.

Las expresiones anteriores nos permiten concluir que:

- Las medias ponderadas que se obtienen al promediar las funciones de privación y de satisfacción que derivan de las Definiciones 1, 2 y 3 de la sección anterior, con la familia de pesos $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, se expresan a partir de un índice de la clase $\beta_A = \{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$, o de una combinación lineal de ellos.
- Todos y cada uno de los elementos de β_A se puede interpretar como una medida de privación social, como consecuencia de [15].

4.1. Casos particulares

Si en la función peso se fija el valor de uno de sus parámetros, se obtienen como medidas de privación o de satisfacción social, subfamilias de β_A ya conocidas en la literatura. A continuación se consideran varios casos.

4.4.1. Para $s=1$, se pondera con $\omega_{(1,t)}(p) = t(1-p)^{t-1}$, función estrictamente decreciente de p si $t>1$ y estrictamente creciente si $0<t<1$. Además, para $t>1$, la tasa de decrecimiento aumenta al hacerlo t, asignando cada vez mayor peso a las rentas bajas. Al aplicar $\omega_{(1,t)}(\cdot)$ a las funciones de privación resulta:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_1(X)) = \int_0^{x_M} P_1(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \mu I(2,t)$$

la familia γ de los Gini generalizados absolutos[21] (Yitzhaki, 1983).

Cuando se aplica $\omega_{(1,t)}(\cdot)$ a $P_2(\cdot)$, se tiene:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_2(X)) = \int_0^{x_M} P_2(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \mu I(1,t) \cdot$$

Es la familia δ propuesta por Imedio y otros (2011), cuyos elementos presentan mayor aversión a la desigualdad que los de la familia anterior[22].

Al ponderar $P_3(\cdot)$ con $\omega_{(1,t)}(\cdot)$, resulta:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_3(X)) = \int_0^{x_M} P_3(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \frac{t}{t-1}\mu I(2,t)\,,\ t > 1.$$

Se obtienen, de nuevo, los Gini generalizados multiplicados por una constante que varía según el orden del índice.

4.1.2. Si $t = 1$, la ponderación es $\omega_{(s,1)}(p) = sp^{s-1}$, mientras que para $t = 2$ es $\omega_{(s,2)}(p) = s(s-1)p^{s-1}(1-p)$. Para $s > 1$, $\omega_{(s,1)}(\cdot)$ es estrictamente creciente, pondera en mayor medida las rentas altas, mientras que $\omega_{(s,2)}(\cdot)$ es campaniforme y asigna mayor ponderación a distintos tramos de rentas intermedias, según los valores del parámetro s. Al aplicar estos pesos a las funciones de satisfacción, resulta:

$$E_{\omega_{(s,1)}}(S_{,1}(X)) = \int_0^{x_M} S_1(x)\omega_{(s,1)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s+1,1) \cdot$$

$$E_{\omega_{(s,2)}}(S_2(X)) = \int_0^{x_M} S_2(x)\omega_{(s,2)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s+1,1) \cdot$$

$$E_{\omega_{(s,1)}}(S_3(X)) = \int_0^{x_M} S_3(x)\omega_{(s,1)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s,1) \cdot$$

En los tres casos anteriores, la satisfacción social media ponderada se expresa en función de los índices de la familia α propuesta por Aaberge (2007), que presentan menor aversión a la desigualdad que los Gini generalizados y los de la familia δ.

4.1.3. En general, la media ponderada de una función de privación/satisfacción utilizando un peso decreciente (resp. creciente) se expresa a partir de índices que incorporan mayor (resp. menor) aversión a la desigualdad que la media simple de dicha función, como consecuencia de asignar mayor peso a las rentas bajas (resp. altas). Cuando la ponderación no es monótona, es campaniforme o en forma de U, el resultado depende de cada caso concreto. Veamos algunos ejemplos.

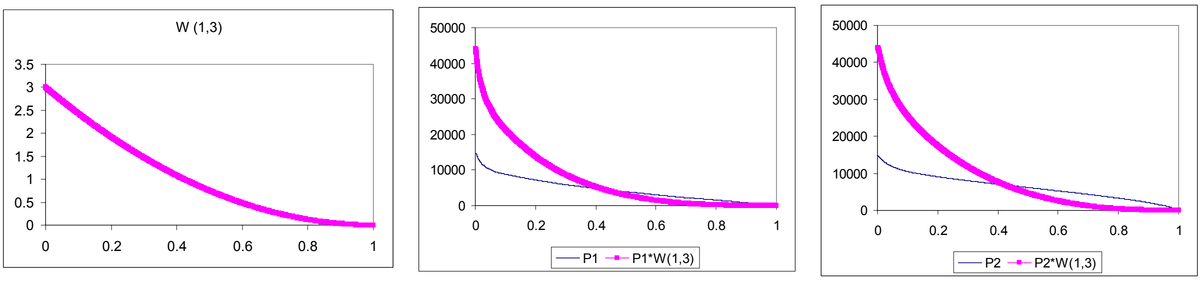
En la Figura 6 se representa la gráfica de $\omega_{(1,3)}(p) = 3(1-p)^2$, $0 < p < 1$, estrictamente decreciente, junto a los pares de funciones $P_1(\cdot)$ y $P_1(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_2(\cdot)$ y $P_2(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$.

[21] En Bárcena, Imedio y Martín (2003) se llega a este resultado utilizando otro enfoque.

[22] En el sentido siguiente: para $t \geq 1$, el índice I(1,t) presenta mayor aversión a la desigualdad que I(2,t).

Figura 6

$\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_1(\cdot)$ y $P_1(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_2(\cdot)$ y $P_2(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

En los gráficos anteriores se aprecia en qué medida la aplicación de la ponderación $\omega(1,3)(\cdot)$ afecta a las funciones de privación iniciales. En cuanto a los valores de la privación social, se tiene:

$$E(P_1(X)) = \mu G = \mu I(2,1), \quad E_{\omega_{(1,3)}}(P_1(X)) = \mu I(2,3).$$

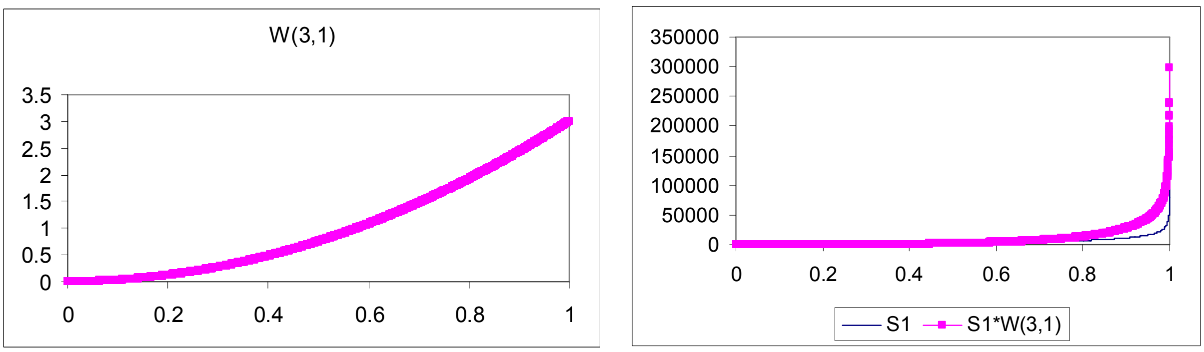
$$E(P_2(X)) = \mu B = \mu I(1,1), \quad E_{\omega_{(1,3)}}(P_2(X)) = \mu I(1,3).$$

Al haber utilizado una ponderación que asigna mayor peso a las rentas bajas y decrece en las intermedias y más aún en las rentas altas, en el caso de P1 hemos pasado del Gini ordinario, I(2,1), al generalizado de orden tres, I(2,3), con mayor aversión a la desigualdad. Análogamente, para P2 hemos obtenido, al ponderar, el índice I(1,3) de la familia δ que incorpora mayor preferencia por la igualdad que el índice de Bonferroni, I(1,1).

En la Figura 7 se representa el peso $\omega_{(3,1)}(p) = 3p^2$, $0 < p < 1$, estrictamente creciente, y el par de funciones $S_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)\omega_{(3,1)}(\cdot)$.

Figura 7

$\omega_{(3,1)}(\cdot)$, $S_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)\omega_{(3,1)}(\cdot)$



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

El peso utilizado pondera en mayor medida las rentas altas y es menor para las intermedias y bajas. Su incidencia sobre la satisfacción social es:

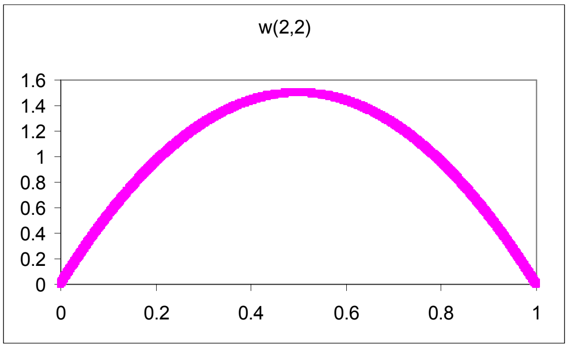
$$E(S_1(X)) = \mu G = \mu I(2,1), \quad E_{\omega_{(3,1)}}(S_1(X)) = 3\mu I(4,1).$$

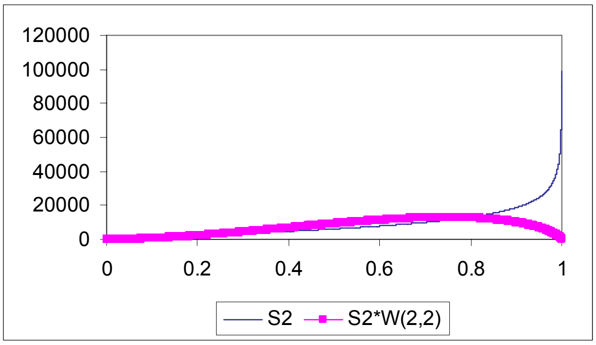
Al ponderar, la satisfacción social se expresa a partir del índice I(4,1) de la familia α que presenta menor aversión a la desigualdad que el índice de Gini, I(2,1).

Si ponderamos con $\omega_{(2,2)}(p)=6p(1-p)$, campaniforme y simétrica respecto a $p=0.5$, se asigna mayor peso a las rentas intermedias y un peso menor a las de los extremos de la distribución. En la Figura 8, se representa $\omega_{(2,2)}(\cdot)$ y el par de funciones $S_2(\cdot)$ y $S_2(\cdot)\omega_{(2,2)}(\cdot)$.

Figura 8

$\boldsymbol{\omega_{(2,2)}(\cdot)}$, $\boldsymbol{S_2(\cdot)}$ **y** $\boldsymbol{S_2(\cdot)\omega_{(2,2)}(\cdot)}$





Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

En este caso, los valores medios, sin y con ponderación, son, respectivamente:

$$E(S_2(X))=\mu V\,,\ E_{\omega_{(2,2)}}(S_2(X))=2\mu I(3,1)\,.$$

Se expresan a partir del índice de De Vergottini,V, y del índice I(3,1), perteneciente a la familia α. La comparación entre ambos según su grado de aversión a la desigualdad no es inmediata[23].

5. INCIDENCIA DEL IMPUESTO LINEAL SOBRE LA PRIVACIÓN Y LA SATISFACCIÓN

En Imedio y otros (1999) se estudia el efecto de un impuesto sobre la renta en las funciones de privación/satisfacción y en sus respectivos valores medios[24], cuando las comparaciones entre los individuos se realizan según la Definición 1. Se demuestra que si un impuesto no altera la ordenación inicial de las unidades impositivas según sus niveles de renta y es estrictamente creciente, reduce la privación/satisfacción de cada nivel de renta. Además, si el impuesto es progresivo, tipos medios crecientes, esa reducción es mayor que la producida por el impuesto proporcional de igual recaudación. En esta sección se analiza este efecto cuando el impuesto es lineal. Este impuesto, junto a su simplicidad y eficiencia, permite un tratamiento analítico abordable y proporciona resultados más precisos que los que puedan derivarse del caso general. En un primer apartado de esta sección se exponen algunas características relevantes de la tarifa lineal.

5.1. Características generales del impuesto lineal[25]

La expresión de un impuesto lineal es:

$$t_L(x)=m(x-a),\ a>0,\qquad 0<m<1. \qquad [19]$$

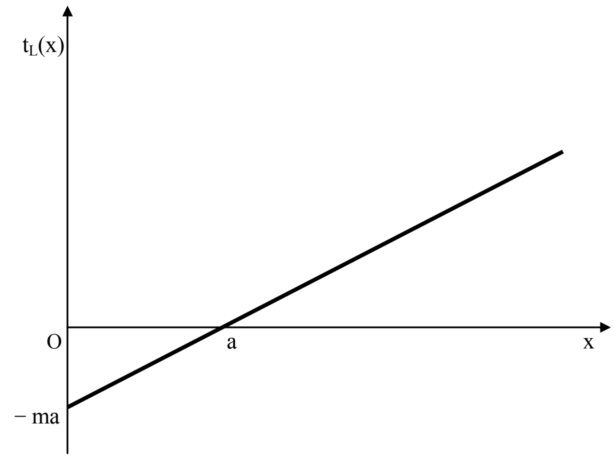
Por lo tanto, la cuota líquida, $t_L(x)$, es el resultado de aplicar un tipo único, m, a la diferencia entre la renta fiscal, x, de cada contribuyente y una reducción, a. Para las rentas menores que a el impuesto se convierte en una transferencia. A continuación se representa un impuesto lineal con tipo marginal m y mínimo exento a.

[23] Ambos presentan una aversión a la desigualdad menor que el índice de Gini. La comparación directa entre ellos se realizaría a partir del grado de concavidad de sus respectivas distribuciones de preferencias sociales.

[24] Véase también Chakravarty y Moyes (2003).

[25] Véase Marín (1989), Imedio (1996).

Figura 9
TARIFA LINEAL CON TIPO MARGINAL M Y MÍNIMO EXENTO A



A partir de [19] es sencillo comprobar que es un impuesto progresivo. Es decir, su tipo medio es una función creciente de la base imponible. Dicha función es cóncava y tiende asintóticamente hacia el tipo marginal.

Recordemos que la distribución inicial de la renta, sobre la que incide la tarifa lineal, está representada por una variable aleatoria no negativa, X, siendo $F_X(\cdot)$ su función de distribución y μ_X su media. Fijados los dos parámetros del impuesto, m y a, el nivel de recaudación queda determinado por la base imponible media, μ_X, dado que el impuesto medio es

$$\tau = m(\mu_X - a) = t_L(\mu_X).$$

Por lo tanto, la recaudación es independiente de la distribución inicial de la renta y será positiva si $a < \mu_X$.

La renta media después de impuestos es

$$\mu_{X-T} = \mu_X - \tau = (1-m)\mu_X + ma.$$

Por otra parte, como la cuota sólo depende de la renta de cada contribuyente y es $m < 1$, la aplicación de la tarifa conserva la ordenación de los contribuyentes según sus niveles de renta.

5.2. Resultados sobre el efecto redistributivo del impuesto lineal

En cualquier impuesto progresivo a lo largo de la escala de rentas, como lo es el lineal, un aumento de la renta sujeta a gravamen implica un aumento más que proporcional de la cuota. Como consecuencia, se traslada parte de la carga tributaria desde las rentas "bajas" a las "altas", lo que a su vez da lugar a una traslación simultánea, en sentido inverso, de una parte del volumen total de renta después de impuestos. Esa traslación es el efecto redistributivo o igualador del impuesto. El índice de progresión local directamente relacionado con este efecto es la progresión residual[26] (Musgrave y Thin (1948), Jakobsson (1976) y Kakwani (1977)). En el caso lineal, se demuestra que el valor de ese índice en la renta media, $PR(\mu_X)$, determina la capacidad redistributiva del impuesto, en términos relativos, tanto local como globalmente. Su expresión viene dada por:

$$PR(\mu_X) = \left(\varepsilon_{x-t_L(x),x}\right)_{x=\mu_X} = \frac{(1-m)\mu_X}{(1-m)\mu_X + ma} = (1-m)\frac{\mu_X}{\mu_{X-T}} < 1. \qquad [20]$$

[26] Se define, para cada nivel de renta, como la elasticidad de la renta después del impuesto con respecto a la renta antes del mismo. Este índice es inferior a la unidad en los niveles de renta en que el impuesto sea progresivo y una reducción de su valor implica mayor progresión.

Una forma natural de analizar la incidencia redistributiva consiste en comparar las curvas de Lorenz, u otras que evalúen la desigualdad, de las distribuciones de renta antes y después de la aplicación del impuesto o, lo que es más restrictivo, calcular la variación de un determinado índice de desigualdad en ambas distribuciones.

Si L_X y L_{X-T} representan, respectivamente, las curvas de Lorenz de las distribuciones de renta antes y después de aplicar la tarifa lineal, se tiene:

$$L_{X-T}(p) = \frac{1}{\mu_{X-T}} \int_0^x (s - t_L(s))dF(s) =$$

$$= \frac{(1-m)\mu_X L_X(p) + map}{(1-m)\mu_X + ma} = PR(\mu_X)L_X(p) + (1 - PR(\mu_X))p, \quad 0 \le p \le 1. \qquad [21]$$

Es decir, la curva de Lorenz de la distribución de la renta después de impuestos es, en cada punto, una media ponderada de la curva de Lorenz inicial y de la línea de equidistribución. Además, las ponderaciones, en este caso, son idénticas para todo $p \in [0,1]$. Es inmediato comprobar, a partir de [2], [3] y [21], que se obtiene el mismo resultado para las curvas de Bonferroni y de De Vergottini.

Proposición 8. De la expresión anterior y de sus análogas para las dos curvas citadas, resulta:

$$p - L_{X-T}(p) = PR(\mu_X)(p - L_X(p)), \quad 0 \le p \le 1.$$

$$1 - B_{X-T}(p) = PR(\mu_X)(1 - B_X(p)), \quad 0 \le p \le 1.$$

$$V_{X-T}(p) - 1 = PR(\mu_X)(V_X(p) - 1), \quad 0 \le p \le 1.$$

Esto es, la aplicación del impuesto lineal reduce la distancia entre cada una de estas curvas y su correspondiente línea de equidistribución. Esa reducción se produce en la misma proporción, $PR(\mu_X) < 1$, para cada $p \in (0,1)$. Por lo tanto, en esa misma proporción se reducirán todas las medidas de desigualdad que se construyen mediante la comparación de cada una de las curvas anteriores con su correspondiente si la distribución fuese igualitaria. En definitiva, de las igualdades anteriores y de las expresiones [4], [5], [6] y [8] deriva el siguiente resultado.

Proposición 9. Al aplicar la tarifa lineal, la variación de la desigualdad relativa, al pasar de la distribución “antes” a la distribución “después”, valorada mediante los índices de Gini, de Bonferroni, de De Vergottini o los de la familia β viene dada por:

$$G_{X-T} = PR(\mu_X)G_X < G_X.$$

$$B_{X-T} = PR(\mu_X)B_X < B_X.$$

$$V_{X-T} = PR(\mu_X)V_X < V_X.$$

$$I_{X-T}(s,t) = PR(\mu_X)I_X(s,t) < I_X(s,t), \quad s > 0, t > 0.$$

Es inmediato que al disminuir el valor de $PR(\mu_X)$, lo que implica una mayor progresividad de la tarifa, también disminuye la desigualdad relativa asociada a la distribución después de impuestos.

El resultado anterior, aunque no sorprenda a quienes estén familiarizados con los aspectos redistributivos de la tarifa lineal, no deja de ser llamativo. Confirma la sencillez operativa que proporciona esta tarifa. Las igualdades de las dos proposiciones anteriores indican que el valor de una medida de progresión local en la renta media, determina y caracteriza la redistribución local y global que implica este impuesto al evaluarla mediante una extensa familia de medidas de desigualdad.

Si el interés se centra en la desigualdad absoluta y para su valoración utilizamos los índices μG, μB, μV o los de la familia $\beta_A = \{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$, teniendo en cuenta la expresión [20] y las igualdades de la Proposición 9, es inmediato el resultado siguiente.

Proposición 10. Tras aplicar la tarifa lineal, la desigualdad absoluta evaluada mediante los índices absolutos de Gini, de Bonferroni, de De Vergottini o los de la familia β_A, viene dada por:

$$\mu_{X-T}G_{X-T} = (1-m)\mu_X G_X .$$

$$\mu_{X-T}B_{X-T} = (1-m)\mu_X B_X .$$

$$\mu_{X-T}V_{X-T} = (1-m)\mu_X V_X .$$

$$\mu_{X-T}I_{X-T}(s,t) = (1-m)\mu_X I_X(s,t), \quad s>0, t>0.$$

En consecuencia, la reducción de los anteriores índices absolutos al incidir una tarifa lineal sólo depende del tipo marginal de la misma, a través del factor $1-m \in (0,1)$. La desigualdad absoluta de la distribución después de impuestos disminuirá al aumentar m. Este resultado es aún más contundente que el anterior. Al evaluar el efecto redistributivo, en términos relativos, interviene el valor de $PR(\mu_X)$, que depende de μ_X y de los dos parámetros de la tarifa. Sin embargo, en la valoración del efecto redistributivo global, en términos absolutos, sólo interviene el tipo marginal.

Estos resultados se trasladan en el epígrafe siguiente al contexto de la privación/satisfacción asociadas a cada nivel de renta y a los índices de desigualdad que nos proporcionan los valores medios de dichas magnitudes para el conjunto de la población.

5.3. Efecto, local y global, sobre la privación/satisfacción

Al analizar la incidencia del impuesto lineal sobre las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o satisfacción, según las diferentes definiciones, contempladas en este trabajo, conviene hacer algunas consideraciones previas, de tipo formal y sobre la notación. Si $F_X(\cdot) \equiv F(\cdot)$ es la función de distribución de la renta antes de impuestos y $F_{X-T}(\cdot)$ la distribución resultante tras la aplicación de la tarifa lineal $t_L(\cdot)$, al no modificarse la ordenación inicial de los contribuyentes según sus niveles de renta, se verifica:

$$F(x) = F_{X-T}(x - t_L(x)), \quad x > 0 .$$

Por otra parte, si $P_X(x)$ es la privación de un individuo con renta x en la distribución antes de impuestos, mediante $P_{X-T}(x)$ se representa la privación de ese individuo al pasar a la distribución después de impuestos, si bien su renta en esta distribución será $x - t_L(x)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, si

$$P_{1,X}(x) = (1-F(x))(M(x)-x) = \mu_X(1-L_X(F(x))) - x(1-F(x)), \quad x>0 ,$$

es, en la distribución de renta inicial, la privación asociada al nivel de renta x, cuando las comparaciones interindividuales se realizan según la Definición 1, en la distribución obtenida tras aplicar la tarifa lineal, se tiene:

$$P_{1,X-T}(x) = \mu_{X-T}(1-L_{X-T}(F_{X-T}(x-t_L(x)))) - (x-t_L(x)(1-F_{X-T}(x-t_L(x))) =$$
$$= \mu_{X-T}(1-L_{X-T}(F(x))) - (x-t_L(x)(1-F(x)).$$

Utilizando la expresión de $L_{X-T}(\cdot)$, igualdad [21], mediante un cálculo sencillo, resulta:

$$P_{1,X-T}(x) = (1-m)P_{1,X}(x) < P_{1,X}(x), \quad x>0 .$$

Si el cálculo anterior se repite para la satisfacción, se comprueba que

$$S_{1,X-T}(x) = (1-m)S_{1,X}(x) < S_{1,X}(x), \quad x>0 .$$

Según las igualdades anteriores, la aplicación de $t_L(\cdot)$ implica una reducción de la privación y de la satisfacción asociada a cada nivel de renta. La tasa de reducción, 100m por 100 en términos porcentuales, es idéntica para todas las rentas y sólo depende del tipo marginal de la tarifa. Es inmediato comprobar que este resultado se repite cuando las comparaciones interindividuales se realizan según las Definiciones 2 y 3. Las funciones de privación y de satisfacción que resultan al aplicar $t_L(\cdot)$ son una contracción de las iniciales. Por lo tanto, al obtener la privación o la satisfacción social mediante una media, simple o ponderada, de las funciones correspondientes, entre las medidas de desigualdad que resultan para las distribuciones antes y después de impuestos, existirá el mismo tipo de relación que entre dichas funciones (Proposición 10). La siguiente proposición resume estos resultados.

Proposición 11.

a) Cuando sobre una distribución de rentas incide una tarifa lineal, $t_L(\cdot)$, las funciones que asignan a cada renta su privación (satisfacción) se reducen en una proporción uniforme a lo largo de la escala de rentas. El coeficiente de reducción es $1-m$, siendo $m \in (0,1)$ el tipo marginal de la tarifa. Es decir:

$$P_{i,X-T}(x) = (1-m)P_{i,X}(x), \quad i = 1,2,3, \quad x > 0.$$

$$S_{i,X-T}(x) = (1-m)S_{i,X}(x), \quad i = 1,2,3, \quad x > 0.$$

b) La misma reducción se produce, para el conjunto de la población, en los valores de la privación (satisfacción) social media, simple o ponderada con los pesos $\omega_{(s,t)}(\cdot)$. Es decir:

$$E(P_{i,X-T}(X)) = (1-m)E(P_{i,X}(X)), \quad i = 1,2,3.$$

$$E_\omega(P_{i,X-T}(X)) = (1-m)E_\omega(P_{i,X}(X)), \quad i = 1,2,3.$$

$$E(S_{i,X-T}(X)) = (1-m)E(S_{i,X}(X)), \quad i = 1,2,3.$$

$$E_\omega(S_{i,X-T}(X)) = (1-m)E_\omega(S_{i,X}(X)), \quad i = 1,2,3.$$

En definitiva, el tipo marginal de la tarifa lineal determina su efecto, local y global, sobre la privación (satisfacción) existente en una distribución, como consecuencia de la desigualdad. En las definiciones 1, 2 y 3 al expresar la privación/satisfacción de un individuo respecto a otro en términos de diferencias de rentas, subyace un concepto absoluto de desigualdad. Si esas definiciones se modificasen, relativizando las diferencias de rentas que aparecen en ellas con la renta media de la distribución, incorporarían un concepto relativo de desigualdad. En ese supuesto, los índices que proporcionarían los valores medios de la privación o de la satisfacción serían los índices relativos asociados a los absolutos que se han obtenido en cada caso. En este otro contexto, sería la progresión residual, valorada en la renta media antes del impuesto, la que determinaría el efecto de la tarifa $t_L(\cdot)$ sobre las magnitudes objeto de estudio.

6. ILUSTRACIÓN EMPÍRICA

En esta sección, utilizando como fuente la Encuesta de Condiciones de Vida[27] (ECV) en el año 2008 para España, se analiza empíricamente la capacidad redistributiva de los impuestos directos y su efecto sobre algunas de las medidas de privación/satisfacción introducidas en secciones anteriores. El efecto redistributivo dependerá tanto de los índices utilizados, como de la estructura y características del impuesto. Para ello vamos a considerar dos variables[28]:

- La renta disponible de los hogares (X−T).
- La renta disponible más los impuestos directos (renta antes de impuestos, X).

El efecto redistributivo de los impuestos directos lo valoramos a través de las siguientes medidas de desigualdad. Los índices de Bonferroni, B=I(1,1), de Gini, G=I(2,1), y de De Vergottini, V, junto a los elementos

[27] En terminología inglesa "European Statistics on Income and Living Conditions" (EU-SILC). Es una fuente de referencia sobre estadísticas comparativas de la distribución de ingresos y la exclusión social en el ámbito europeo.

[28] Como un mismo ingreso puede dar lugar a diferentes niveles de vida en función del tamaño y composición del hogar, los ingresos se han ajustado mediante la escala de equivalencia de la OCDE modificada. Esta escala asigna valor 1 al primer adulto del hogar, 0,5 a los adultos restantes y 0,3 a cada menor de 14 años. Con ello se obtiene la variable objeto de estudio, renta equivalente del hogar, y_i, definida como la renta del hogar, x_i, dividida por el número de miembros equivalentes, $m(n_i)$; esto es, $y_i = x_i / m(n_i)$.

de la familia β : I(1,5), I(2,4), I(3,3), I(4,2) e I(5,1). Esta selección incorpora los tres índices clásicos relacionados con los resultados de la sección 3 y otros que se obtienen al ponderar la privación/satisfacción con ponderaciones muy dispares y que, por lo tanto, incorporan juicios de valor muy diversos.

En la Tabla 1 figuran los valores de cada uno de los índices para las distribuciones $X-T$ y X junto al porcentaje de variación al pasar de la segunda a la primera de las distribuciones.

Tabla 1

	B(I(1,1))	G(I(2,1))	V	I(1,5)	I(2,4)	I(3,3)	I(4,2)	I(5,1)
X–T	0.41	0.29	0.13	0.67	0.52	0.41	0.30	0.18
X	0.44	0.32	0.14	0.69	0.55	0.43	0.32	0.19
Tasa de variación	-5.24	-6.88	-8.40	-3.05	-4.86	-6.19	-7.37	-8.45

El pago de los impuestos directos tiene un efecto igualador, reducen la desigualdad. Sin embargo, los porcentajes de disminución de los índices varían sensiblemente. Como la recaudación de los impuestos directos se concentra, en mayor medida, en la cola derecha de la distribución, su efecto redistributivo al pasar a la distribución de renta disponible es más acusado si se evalúa mediante índices que presenten una mayor sensibilidad a los cambios que se producen en las rentas altas.

Por lo tanto, el efecto igualador que presente un impuesto sobre la distribución de rentas depende del índice utilizado según el tramo de rentas en que esa medida centre su interés. Así, se observa que si se consideran los tres índices clásicos B, G y V, la mayor reducción de la desigualdad se produce si para su medición el evaluador social elige V. Al considerar elementos de la familia β, si el evaluador social tiene mayor interés en las rentas bajas y elige I(1,5) para medir la desigualdad, ésta se reduce un 3.05 por 100. Sin embargo, si la atención la centra en las rentas altas y elige I(5,1) para realizar la medición, la desigualdad disminuye un 8.45 por 100. En definitiva, al medir la desigualdad y, a través de ella, el efecto redistributivo de los impuestos directos, es esencial tener en cuenta las características del índice utilizado.

Si la distribución de renta disponible, $X-T$, se hubiese obtenido a partir de X mediante un impuesto lineal de recaudación equivalente, todas y cada una de las anteriores medidas de desigualdad se hubiesen reducido en idéntica proporción, $1-PR(\mu_X)$. Por ejemplo, considerando un impuesto lineal cuyo tipo marginal fuese $m=0.35$, dado que el impuesto medio es $\tau=\mu_X-\mu_{X-T}=19922-15199=4723$ euros, resulta $PR(\mu_X)=0.8515$. Por lo tanto, cada uno de los índices considerados se reduciría en un 14.85 por 100. El efecto redistributivo de la tarifa lineal no depende de la medida de desigualdad utilizada[29].

Los impuestos directos disminuyen la privación/satisfacción social media, tanto a través de la disminución de la renta media, que lo hace en un 23.7 por 100, como de la desigualdad relativa. En la Tabla 2 figuran los valores de algunos índices de privación/satisfacción para las distribuciones $X-T$ y X junto a sus correspondiente porcentajes de variación. Los índices considerados son los absolutos correspondientes a los utilizados en la Tabla 1.

Tabla 2

	μB(I11)	μG(I21)	μV	μI(1,5)	μI(2,4)	μI(3,3)	μI(4,2)	μI(5,1)
X–T	6298	4472	1978	10146	7908	6194	4545	2697
X	8712	6294	2831	13718	10895	8655	6431	3861
Tasa de variación	-27.71	-28.95	-30.11	-26.04	-27.41	-28.43	-29.33	-30.16

[29] Nos referimos a las medidas de desigualdad que se consideran en este trabajo. En general, esta propiedad es válida para índices de desigualdad que se basan en la ponderación de las diferencias entre las rentas de una distribución y su renta media, como consecuencia de que la tarifa lineal produce una contracción uniforme de esas diferencias (Marín, 1989). Las igualdades de la Proposición 9 no son válidas, por ejemplo, para los índices de Atkinson o para los de entropía.

La reducción de la privación social, al igual que ocurre con la desigualdad, es más acentuada cuanto más sensible sea el índice elegido para su medición a los cambios que se produzcan en las rentas altas. Así, si identificamos la privación social con $\mu I(5,1)$, la reducción de la misma al pasar de la renta antes de impuestos a la renta disponible es del 30.16 por 100, mientras que si la medida de privación elegida es $\mu I(1,5)$, dicha reducción es del 26.04 por 100. Si para medir la privación utilizamos los índices absolutos de Bonferroni, Gini y De Vergottini, las reducciones son del 27.71 por 100, del 28.95 por 100 y del 30.11 por 100, respectivamente. Aplicando una tarifa lineal equivalente en recaudación, cada una de las anteriores medidas absolutas de desigualdad se hubiese reducido en idéntica proporción, m. Así, si consideramos la tarifa lineal anterior, $t_L(x) = 0.35(x - a)$, esa reducción sería del 35 por 100 para cada uno de los índices.

Los resultados de esta sección permiten apreciar las diferencias redistributivas entre la aplicación de una tarifa progresiva y la aplicación de una tarifa lineal de recaudación equivalente.

7. CONCLUSIONES

En cualquier formulación de la privación/satisfacción relativas están presentes los aspectos normativos. En cada una de sus etapas subyace un conjunto de juicios de valor.

En primer lugar, en la definición de la privación/satisfacción interindividual hay que especificar:

- Cómo identifica el individuo su situación: con su propia renta o con la media de algún grupo.
- Con quienes se compara: con toda la distribución o con un truncamiento de la misma.

Esto condiciona las características de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o su satisfacción.

En segundo lugar, al obtener los valores medios de las funciones anteriores, se puede utilizar:

- Una media simple.
- Una media ponderada que discrimine entre los diferentes tramos de la escala de rentas mediante el uso de ponderaciones.

El proceso anterior implica que medidas de desigualdad de naturaleza muy diversa, en cuanto a su aversión a la desigualdad, admitan una interpretación como índices de privación/satisfacción social. En este trabajo se demuestra que los índices absolutos de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini, así como los elementos de la familia βA satisfacen esa condición.

La capacidad redistributiva global de un impuesto directo, en términos relativos o absolutos, así como su efecto sobre la privación/satisfacción social, depende, en general, de la medida de desigualdad utilizada. Sin embargo, cuando el impuesto es lineal, los efectos anteriores son idénticos para todos los índices contemplados en este trabajo.

En este trabajo hemos considerado que es el evaluador social quien asigna distintos pesos a la privación asociada a los diferentes tramos de renta. Un enfoque alternativo consistiría en que el propio individuo introdujera un esquema de ponderación al agregar la privación que siente respecto a los demás. Es razonable pensar que asigne más peso a la privación que experimenta respecto a los individuos que se encuentran en una situación que considera “alcanzable” o próxima, y menos peso a las situaciones que percibe como “inaccesibles”. Esta es una cuestión pendiente de estudio, que presenta evidentes dificultades formales y que trataremos de abordar en trabajos posteriores.

REFERENCIAS

AABERGE, R. (2007): “Gini’s nuclear family”, *Journal of Economic Inequality*, 5/3, pp. 305-322.

BÁRCENA, E. and IMEDIO, L. J. (2008): “The Bonferroni, Gini and De Vergotini indices. Inequality, welfare and deprivation in the European Union in 2000”. Research on Economic Inequality, Vol. 16, pp. 231-257. Ed. John Bishop and Buhong Zheng. Inequality and Opportunity: Papers from the Second ECINEQ Society Meeting. JAI Press.

BÁRCENA MARTÍN, E.; IMEDIO OLMEDO, L. J. and MARTÍN REYES, G. (2003): "Privación relativa, imposición sobre la renta e índice de Gini generalizado". Instituto de Estudios Fiscales. *Papeles de Trabajo*, n.º 6/03.

BERREBI, Z. M. and SILBER, J. (1985): “Income inequality indices and deprivation: a generalisation”, *Quarterly Journal of Economics*, 100, pp. 807-810.

BLACKORBY, C. and DONALDSON, D. (1978): “Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare”, *Journal of Economic Theory*, 18, pp. 59-80.

BONFERRONI, C. E. (1930): *Elementi di statistica generale*, Libreria Seber, Firenze.

CHAKRAVARTY, S. R. (1997): “Relative deprivation and satisfaction orderings”, *Indian Statistical Institute*, Calcuta, India.

— (2007): “A deprivation-based axiomatic characterization of the absolute Bonferroni index of inequality”, *Journal of Economic Inequality*, 3, pp. 339-351.

CHAKRAVARTY, S. R. and CHAKRABORTY, A. B. (1984): “On indices of relative deprivation”, *Economic Letters*, 14, pp. 283-287.

CHAKRAVARTY, S. R.; CHATTOPADHYAY, N. and MAJUMDER, A. (1995): “Income inequality, and relative deprivation”, *Keio Economics Studies*, 32.

CHAKRAVARTY, S. R. and MUKHERJEE, D. (1998): “Lorenz domination, utilitarian deprivation rule and equal sacrifice principle”, *The Manchester School Journal*, 66, pp. 521-531.

CHAKRAVARTY, S. R. and MOYES, D. (2003): “Individual welfare, social deprivation and income taxation”, *Economic Theory*, 21, pp. 843-869.

COWELL, F. A. and EBERT, U. (2004): “Complaints and inequality”, *Social Choice and Welfare*, 61, pp. 61-89.

CROSBY, F. (1976): “A model of egoistical relative deprivation”, *Psychological Review*, 83, pp. 85-113.

— 1979): “Relative deprivation revisited: A reponse to Miller, Bolce and Halligan”, *American Political Science Review*, 73, pp. 103-112.

DAVIS, J. (1959): “A formal interpretation of the theory of the relative deprivation”, *Sociometry*, 20, pp. 280-296.

DE VERGOTTINI, M. (1940): “Sul signifacoto di alcuni indici di concentrazione”, *Giornale degli economisti e annali di economia*, 11, pp. 317-347.

EBERT, U. and MOYES, P. (2000): "An axiomatic characterization of Yitzhaki´s index of individual deprivation", *Economics Letters*, 68, pp. 263-270.

EUROSTAT (2010): “Cross-sectional EUSILC UDB 2008 microdata”, Release 01-03-10, European Commission, Eurostat.

GINI, C. (1914): “Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri”, Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 73, pp. 1203-1248.

GURR, T. R. (1968): “A causal model of the civil strife: A comparative analysis using new indices”, *American political science review*, 62, pp. 1104-1124.

HEY, J. D. and LAMBERT, P. J. (1980): “Relative deprivation and the Gini coefficient: comment”, *Quarterly Journal of Economics*, 95, pp. 567-573.

IMEDIO OLMEDO, L. J. (1996): “Un estudio analítico del Impuesto Lineal sobre la Renta”, *Hacienda Pública Española*, 136, pp. 57-70.

IMEDIO OLMEDO, L. J. y BÁRCENA MARTÍN, E. (2003): "Privación relativa, status e imposición sobre la renta". *Estudios de Economía Aplicada*, Vol. 21-1.

— (2007): “Dos familias numerables de medidas de desigualdad”, *Investigaciones Económicas* XXX(1), pp. 191-217.

IMEDIO OLMEDO, L. J.; PARRADO GALLARDO, E. M. y SARRIÓN, M. D. (1999): “Privación relativa e imposición sobre la renta”, *Hacienda Pública Española*, 149, pp. 137-145.

IMEDIO OLMEDO, L. J.; BÁRCENA MARTÍN, E. y PARRADO GALLARDO, E. M. (2009a): “La clase beta de medidas de desigualdad”, *Papeles de trabajo*, IEF, 11/2009.

— (2009b): “A wide class of inequality measures based on the Bonferroni curve”, at the Cornell University/London School of Economics “Inequality: New Directions” conference held in Ithaca, New York, September, 2009.

— (2009c): “Tres medidas complementarias de desigualdad”, *Estadística Española*, Vol. 51, n.º 171, pp. 363-394.

— (2011): “A class of Bonferroni Inequality Indices”, *Journal of Public Economic Theory*, 13(1), pp. 97-124.

JAKOBSSON, U. (1976): “On the measurement of the degree of progression”, *Journal of Public Economics*, 5, pp. 161-168.

KAKWANI, N. C. (1977): “Measurement of tax progressivity. An international comparison”, *Economic Journal*, 87, pp. 71-80.

— (1980): “On a class of poverty measures”, *Econometrica* 48, pp. 437-446.

MAGDALOU, B. and MOYES, P. (2009): “Deprivation, welfare and inequality” *Social Choice and Welfare*, 32(2), pp. 253-273.

MARÍN, J. (1989): “Dos propiedades del impuesto lineal”, *Investigaciones Económicas*, 13(1), pp. 3-14.

MUSGRAVE, R. A. and THIN, T. (1948): “Progressive taxation in an inflationary economy”, *Journal of Political Economy*, 56, pp. 498-514.

NYGARD, F. and SANDSTRÖM, A. (1981): *Measuring income inequality*, Almqvist and Wicksell International, Stockholm.

PAUL, S. (1991): “An index of relative deprivation”, *Economics Letters*, 36, pp. 337-341.

PODDER, N. (1996): “Relative deprivation, envy and economic inequality”, *Kiklos*, 49, pp. 353-376.

RAWLS, J. (1971): *A theory of justice*, Harvard University Press, Cambridge.

RUNCIMAN, W. G. (1966): *Relative deprivation and social justice*, Routledge, London.

SEN, A. K. (1973): *On economic inequality*, Clarendon Press, Oxford.

STOUFFER, S. A.; SUCHMAN, E. A.; DE VINNEY, L. C.; STAR, S. A. and M.WILLIAMS, R. (1949): *The American soldier: adjustment during army life*, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

TEMKIN, L. S. (1986): "Inequality", *Philosophy and Public Affairs*, 15, pp. 99-121.

— (1993): *Inequality*, Oxford: Oxford University Press.

YITZHAKI, S. (1979): "Relative deprivation and the Gini coefficient", *Quarterly Journal of Economics*, 95, pp. 321-324.

— (1982): "Relative deprivation and economic welfare", *European Economic Review*, 17, pp. 99-113.

— (1983): "On an extension of the Gini index", *International Economic Review*, 24, pp. 617-628.

SÍNTESIS
PRINCIPALES IMPLICACIONES DE POLÍTICA ECONÓMICA

Los conceptos de privación/satisfacción son consecuencia de la desigualdad. Si al tratar de cuantificarlos se toma como referencia la renta de los individuos, se establece una estrecha relación entre los índices que valoran la desigualdad existente en una distribución de rentas y los que evalúan la privación/satisfacción social.

Así como en la medición de la desigualdad cada índice incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en la distribución, según los juicios de valor que subyacen en él, también al evaluar la privación/satisfacción, tanto para los individuos como para el conjunto de la sociedad, se pueden adoptar diferentes actitudes en las que también están presentes los aspectos normativos. La principal conclusión de este trabajo es que medidas de desigualdad de naturaleza muy diversa admiten una interpretación como índices de privación/satisfacción social. Es el caso de los índices absolutos de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini, así como el de los elementos de la familia β_A. Los diferentes resultados se obtienen en función de cómo se realicen las comparaciones entre los índividuos y de los criterios utilizados al discriminar, mediante el uso de ponderaciones, entre los distintos tramos de rentas.

Al analizar el efecto de la tarifa lineal tanto sobre las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o satisfacción, como sobre las medidas de desigualdad que proporcionan el valor medio de esas funciones, se pone de manifiesto que su incidencia sobre esas magnitudes deriva del efecto redistributivo de este impuesto. El tipo marginal de la tarifa lineal determina su efecto, local y global, sobre la privación (satisfacción). Sucede así porque en las definiciones utilizadas para expresar la privación/satisfacción de un individuo respecto a otro, formuladas en términos de diferencias de rentas, subyace un concepto absoluto de desigualdad. Si en esas definiciones se relativizasen las diferencias de rentas con la renta media, incorporarían un concepto relativo de desigualdad. En ese supuesto, los índices que proporcionarían los valores medios de la privación o de la satisfacción serían los índices relativos asociados a los absolutos obtenidos en cada caso y el efecto de la tarifa sobre las magnitudes objeto de estudio quedaría determinado por la progresión residual, valorada en la renta media antes de impuestos.