NOTAS SOBRE DESAGREGACIÓN TEMPORAL DE SERIES ECONÓMICAS*

Autor: *Enrique M. Quilis* [(a)]

P.T. N.º 1/01

* Estas notas se basan en el material preparado para las clases de la Escuela de Estadística del INE. Agradezco las discusiones sobre trimestralización mantenidas a lo largo de muchos afortunados años con Ana Mª Abad, Alfredo Cristóbal, Rafael Frutos y Francisco Melis así como la minuciosa revisión de Juan Bógalo. Las opiniones expresadas corresponden al autor y no reflejan necesariamente las del INE.

(a) Instituto Nacional de Estadística. Paseo de la Castellana, 183. 28046–Madrid.
<emquilis@ine.es>

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo se examinan las principales técnicas de desagregación temporal de series económicas. Se ha efectuado una selección basada en una línea de desarrollo común que va desde los métodos más sencillos hasta los más complejos, de forma que cada uno de ellos puede ser considerado como una generalización o ampliación de otros más simples. Asimismo, se realiza una exposición específica del problema de la conciliación, esto es, la incorporación explícita de restricciones transversales en un contexto de estimación multivariante. Este problema tiene importantes vínculos formales y conceptuales con el de la desagregación temporal, además de ser un aspecto esencial de los métodos de estimación de las Cuentas Nacionales.

Palabras clave: Desagregación temporal, indicadores económicos, modelos de regresión, conciliación, cuentas nacionales.

Códigos JEL: C22, C32, C82.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y DEFINICIONES PRELIMINARES

Las técnicas de desagregación temporal de series económicas son uno de los elementos esenciales en la elaboración de la Contabilidad Nacional Trimestral de un buen número de países, entre ellos España, debido a que proporcionan una forma operativa, a la par que objetiva, de combinar la relevancia de los indicadores de coyuntura con el rigor y coherencia interna de la Contabilidad Nacional, véase INE (1993).

Con el transcurso del tiempo, estas técnicas han ampliado sensiblemente su ámbito de aplicación, de forma que son en la actualidad uno de los métodos de análisis cuantitativo habituales del análisis de la coyuntura. De esta manera, los análisis de congruencia entre indicadores y agregados anuales pueden ampliarse fácilmente para disponer de estimaciones de alta frecuencia de estos últimos.

En este trabajo se examinan las principales técnicas de desagregación temporal de series económicas con una perspectiva esencialmente aplicada. En consecuencia, se ha efectuado una selección basada en una línea de desarrollo común que va desde los métodos más sencillos hasta los más complejos, de forma que cada uno de ellos puede ser considerado como una generalización o ampliación de otros más simples. Como en toda selección, algunas técnicas han sido excluidas, tanto sencillas como sofisticadas, ya que su exposición detallada oscurecería la línea argumental básica. Exposiciones adicionales se encuentran en Sanz (1982), Melis (1986), di Fonzo (1987) y Pavía (1997), entre otros.

Asimismo, se realiza un tratamiento específico del problema de la conciliación, esto es, la incorporación explícita de restricciones transversales en un contexto de estimación multivariante. Este problema, de naturaleza esencialmente estática, tiene importantes vínculos formales y conceptuales con el de la desagregación temporal, además de ser un aspecto esencial de los métodos de estimación de las Cuentas Nacionales en todos sus niveles: estructural, trimestral y regional.

A continuación se expone formalmente el problema de la desagregación temporal. Sea $Y=\{Y_T : T=1..N\}$ la serie anual observada y $x=\{x_{i,t,T} : i=1..p,\ t=1..4,\ T=1..N\}$ una matriz nxp cuyas filas recogen las *n* observaciones disponibles sobre *p* indicadores de frecuencia trimestral, siendo $p\geq 1$. Naturalmente, $n=4N$.

El problema de la desagregación temporal consiste en estimar una serie $y=\{y_{t,T} : t=1..4,\ T=1..N\}$ que satisfaga la restricción temporal asociada a que la suma de los cuatro trimestres pertenecientes a un mismo año coincida con el total anual correspondiente:

$$\sum_{t=1}^{4} y_{t,T} = Y_T \quad \forall T \qquad [1.1]$$

Esta restricción longitudinal se puede expresar en forma matricial como:

$$By = Y \qquad [1.2]$$

donde B:Nxn es la matriz de agregación temporal definida como:

$$B = I_N \otimes f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [1.3]$$

$\otimes$ denota el producto tensorial de Kronecker y f=[1,1,1,1]. Esta expresión permite considerar otros casos: si f=[¼,¼,¼,¼] se trata de la distribución temporal de un índice y, si f=[0,0,0,1], se obtiene un problema de interpolación[1]. Sin pérdida de generalidad, se considerará el caso de distribución de un flujo: f=[1,1,1,1].

La relación funcional entre *y* e *Y* puede estar condicionada por la información contenida en los indicadores trimestrales *x*. En este caso se tienen los llamados "métodos de desagregación temporal basados en indicadores". Dentro de éstos existen dos enfoques principales: métodos de ajuste y métodos basados en modelos. Los primeros consideran la estimación de *y* como la solución de un programa de optimización restringida mientras que los segundos plantean dicha estimación como un problema inferencial: dada la estructura del modelo, derivar estimadores lineales, insesgados y de varianza mínima (ELIO), que permitan obtener *y* en función de *Y* y de *x*, verificando al mismo tiempo la restricción longitudinal [1.2].

Por otra parte, si no se dispone de indicadores de aproximación trimestral se pueden emplear métodos de desagregación temporal que sólo tienen en cuenta la información contenida en la serie anual *Y*. Son los llamados "métodos de desagregación temporal sin indicadores".

La selección de los indicadores apropiados para aplicar las técnicas de distribución temporal requiere, por su extensión y por las múltiples consideraciones a tener en cuenta, un tratamiento específico que excede por completo el objetivo principal de este trabajo. No obstante, como se verá a lo largo del texto, su relevancia práctica está fuera de toda duda.

La estructura del texto es la siguiente. En la segunda sección se presenta el método de Boot *et al.* (1967) como exponente de las técnicas de desagregación temporal sin indicadores. A pesar de su sencillez, este método da lugar a proce-

---

[1] Naturalmente, si f=[1,0,0,0] u otra combinación de tres ceros y un uno también se trata de una interpolación.

dimientos de estimación que serán empleados a su vez por otros más sofisticados y plantea una serie de consideraciones acerca de la naturaleza de la estimación trimestral que son características de todos los métodos de distribución temporal considerados.

La tercera sección está dedicada a los métodos basados en indicadores. Se exponen dos métodos basados en procedimientos de ajuste -Denton (1971) y Fernández (1981)- y otros dos basados en modelos: Chow y Lin (1971) y Litterman (1983). La exposición tratará de enfatizar los elementos comunes existentes entre todos ellos y, en particular, la conexión entre las metodologías propuestas por Chow y Lin y por Fernández.

La relación existente entre conciliación y desagregación temporal es presentada en la cuarta sección e ilustrada mediante el método de di Fonzo (1990, 1994), que ofrece una generalización del método de Chow y Lin al caso multivariante. La quinta sección ofrece las principales conclusiones y líneas de desarrollo. Finalmente, un apéndice detallan algunos aspectos formales tratados en el texto principal.

2. DESAGREGACIÓN TEMPORAL SIN INDICADORES

La desagregación temporal de series para las que no se dispone de indicadores de alta frecuencia ha dado lugar a una serie de métodos que combinan de una forma u otra la información muestral contenida en Y_T con determinadas consideraciones *a priori* acerca de las propiedades estocásticas de las serie desagregada, que han de ser suministradas por el analista. A continuación se expone uno de los procedimientos más empleados por la sensatez de sus hipótesis y por su sencillez.

El método de Boot *et al.* (1967) plantea la estimación de y_t como la solución de un programa de minimización restringida en el que, por una parte, la función objetivo recoge determinadas consideraciones *a priori* sobre la evolución tendencial de la serie y_t objeto de estimación y, por otra parte, las restricciones reflejan la necesaria consistencia temporal característica de los problemas de desagregación temporal.

Con el fin de facilitar la exposición subsiguiente, se considerará la siguiente variable auxiliar u_t:

$$u_t = \begin{Bmatrix} y_t \\ \nabla y_t \\ \nabla^2 y_t \end{Bmatrix} = \nabla^d y_t \quad \text{siendo } \nabla = (1-B) \text{ y } d = 0,1,2 \qquad [2.1]$$

El programa de optimización trata de que la volatilidad de la serie u_t sea lo más pequeña posible, esto es, que su suma de cuadrados alcance un valor mínimo.

Así, por ejemplo, si $u_t = \nabla y_t$ se tratará de minimizar la variabilidad de los crecimientos intertrimestrales de la serie que se desea estimar, de forma compatible con la restricción longitudinal.

Este criterio de optimización se basa en el principio de razón insuficiente: dado que la evolución intraanual de la variable *y* es, por definición, inobservable, es razonable suponer un patrón evolutivo suave que de lugar a que los crecimientos sean lo más uniformes posibles.

Por otra parte, esta función objetivo también puede ser racionalizada como una manera de imponer a la serie estimada y_t una determinada estructura en su evolución tendencial. De esta manera, si el analista considera que debe poseer una tendencia estocástica integrada de orden uno aplicará la transformación $u_t = \nabla y_t$. En consecuencia, un criterio frecuentemente utilizado en el ámbito aplicado consiste en seleccionar *d* en [2.1] de manera que refleje el mismo grado de diferenciación que la serie anual Y_T que se desea trimestralizar. En adelante, se asumirá, sin pérdida de generalidad, $d = 1$.

En consecuencia, Boot *et al.* plantean el siguiente programa de minimización condicionada:

$$\underset{y}{\mathrm{MIN}} \quad \Phi = \sum_{t=2}^{n} u_t^2 = \sum_{t=2}^{n} (\nabla y_t)^2 \qquad \text{s.a.} \quad \sum_{t=1}^{4} y_{t,T} = Y_T \quad \forall T \qquad [2.2]$$

Formalmente, se trata de un programa de optimización cuadrático sujeto a restricciones lineales. La forma cuadrática es una medida de volatilidad y las restricciones reflejan la consistencia temporal asociada a la condición de que la suma de los cuatro trimestres que forman un año *T* sea igual al valor observado para ese año Y_T. Expresando [2.2] en notación matricial:

$$\underset{y}{\mathrm{MIN}} \quad \phi = u'u = y'D'Dy \qquad \text{s.a.} \quad By = Y \qquad [2.3]$$

donde D:(n-1)xn es una matriz de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [2.4]$$

Naturalmente, D es la versión matricial del operador de diferenciación $\nabla = (1\text{-}B)$.

El operador lagrangiano asociado al programa [2.3] es:

$$\varphi = \phi + 2\lambda'(By - Y) = y'D'Dy + 2\lambda'(By - Y) \qquad [2.5]$$

donde λ:Nx1 es un vector de multiplicadores de Lagrange no nulos que recogen las *N* restricciones temporales del problema.

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2D'Dy + 2B'\lambda = 0$$

[2.6]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(By - Y) = 0$$

En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} D'D & B' \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \qquad [2.7]$$

Por lo tanto, la estimación de *y* se obtiene a partir de [2.7] de forma inmediata:

$$\begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'D & B' \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \qquad [2.8]$$

Naturalmente, de [2.8] se obtiene la expresión explícita para *y*:

$$y = (D'D)^{-1} B' \left[B(D'D)^{-1} B' \right]^{-1} Y = A[D,B]Y \qquad [2.9]$$

En la ecuación anterior A[D,B] es una matriz nxN que, aplicada a la serie anual observada *Y* da lugar a la correspondiente serie trimestral *y*, cuantitativamente coherente con la primera (By=Y) y cuya volatilidad intertrimestral *f* es tan pequeña como ha sido posible.

Esta matriz *A* depende de *B* y *D*, esto es, su estructura está condicionada por la naturaleza del problema de desagregación temporal que se plantea (B) y por el grado de suavidad que se desea imponer a la serie estimada (D). Naturalmente, como ya se ha comentado, esta última dependencia equivale a una determinada consideración *a priori* de las características tendenciales de *y*.

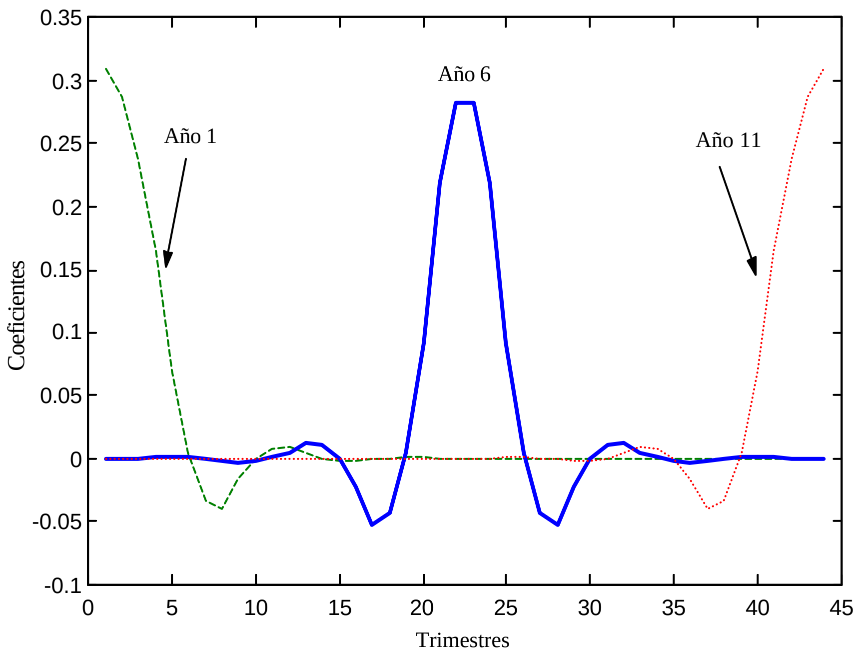
Asimismo, la matriz *A* también puede interpretarse como un filtro lineal cuyos coeficientes varían con el tiempo, de forma que el filtro que se utiliza en los extremos de la serie no es el mismo que el que se aplica en el tramo central. Esta dependencia temporal del filtro *A* tiene dos importantes consecuencias:

i. Inhomogeneidad de la serie trimestral: las propiedades dinámicas de *y* van a variar dependiendo del tramo muestral.

ii. Presencia de revisiones: a medida que se incorporen nuevos valores a *Y* se modificarán los valores trimestrales estimados *y* aunque los valores anteriores de la serie anual no hayan sido modificados. La magnitud de las revisiones se concentrará en los extremos de la serie.

Estas consideraciones, comunes a todos los métodos de desagregación temporal, se aprecian muy bien en el gráfico 1, en el que se muestran los coeficientes del filtro *A* para los años inicial, central y final en el caso N=11, de forma que se representan sus contribuciones respectivas a la generación de los n=44 valores trimestrales. La asimetría del filtro en los extremos es patente y su naturaleza cualitativa es muy similar a la que caracteriza al filtro de Hodrick y Prescott, aplicado con mucha frecuencia en el análisis del ciclo económico.

Gráfico 1: Coeficientes del filtro A[D,B] con N=11



Finalmente, Stram y Wei (1986) generalizan el método de Boot *et al*. (1967) al asumir que la serie trimestral inobservable evoluciona según un proceso ARIMA(p,d,q) y proponer que su estimación se realice mediante el siguiente programa de mínimo condicionado:

$$\underset{y}{\mathrm{MIN}} \quad \phi = u' V_u u \qquad \text{s.a.} \quad By = Y \qquad [2.10]$$

donde $u_t = \nabla^d y_t$ y V_u es su matriz de varianzas y covarianzas. Si p=q=0 y d=1 se obtiene el método de Boot *et al.* que acaba de exponerse. Teniendo en cuenta que la determinación del número de raíces unitarias *d* es el aspecto cuantitativo más relevante en la especificación de las propiedades estocásticas de la serie trimestralizada, se puede interpretar el procedimiento de Boot *et al*. como una aproximación de primer orden bastante completa a métodos más sofisticados como el de Stram y Wei.

3. DESAGREGACIÓN TEMPORAL CON INDICADORES

Frecuentemente, el analista de series temporales tiene a su disposición uno o varios indicadores de alta frecuencia que están relacionados con la serie de baja frecuencia que se desea desagregar temporalmente. En consecuencia, la incorporación de la información contenida en dichos indicadores al proceso de desagregación mejorará su calidad ya que:

a) Proporciona una referencia explícita de evolución intraanual a la que debe ajustarse la serie trimestralizada.

b) Permite incluir elementos de alta frecuencia tales como estacionalidad, efectos de calendario, etc. que están ausentes de la serie anual debido a su frecuencia de muestreo.

c) Permite realizar ejercicios de extrapolación tales como la estimación de los trimestres del año en curso.

Existen dos enfoques principales de la distribución temporal basada en indicadores. El primero tiene un planteamiento esencialmente matemático del problema, formalmente similar al de Boot *el al* (1967). Los exponentes más conocidos –Denton (1971) y Fernández (1981)- formulan un programa de optimización cuadrático-lineal del que derivan el procedimiento de trimestralización.

El planteamiento del segundo enfoque se basa en un modelo estadístico explícito que vincula indicador y agregado en la frecuencia trimestral. A continuación, condicionado a dicho modelo, se propone un estimador lineal, insesgado y de varianza mínima (ELIO) para la serie trimestralizada. Los métodos de Chow y Lin (1971) y Litterman (1983) son los exponentes más conocidos de este planteamiento.

La distinción entre los métodos de ajuste y los basados en modelos debe entenderse como un esquema de trabajo conveniente pero no como una barrera infranqueable. Ambos enfoques han de realizar hipótesis relativamente fuertes acerca de la serie trimestral inobservable. Los primeros lo hacen indirectamente al plantear qué medida de volatilidad se desea minimizar y, los segundos, al definir qué estructura gobierna la propiedades estocásticas de dicha serie. Como se podrá comprobar, ambos enfoques tienen muchos elementos en común, siendo el método de Chow y Lin el punto de confluencia más importante. A continuación se exponen ambos procedimientos.

3.1. Métodos de ajuste

Tanto el método de Denton como el de Fernández comparten la misma estructura matemática analizada al exponer el método de Boot *et al.*: un programa de optimización cuadrática sujeto a restricciones lineales, donde la función objetivo representa una medida de volatilidad de la serie trimestral determinada *a priori* por el analista y las restricciones lineales recogen la consistencia cuantitativa entre las estimaciones trimestrales y el dato anual observado.

La diferencia de ambos métodos con el procedimiento de Boot *et al.* radica, en consecuencia, en el conjunto de información disponible, que ahora incluye un vector de *p* indicadores. El orden de la exposición es el siguiente: en primer lugar, se presenta el método de Denton, que es una generalización del de Boot *et al.* y, a continuación, el de Fernández que, a su vez, permite considerar al de Denton como un caso especial suyo.

Método de Denton (1971)

Sea $x=\{x_{t,T} : t=1..4,\ T=1..N\}$ un vector nx1 cuyos elementos recogen las observaciones disponibles de un indicador de frecuencia trimestral seleccionado para sustentar la desagregación temporal de *Y*. Nótese que p=1.

En el método planteado por Denton la estimación trimestral *y*, cuantitativamente coherente con los datos anuales *Y*, se determina como solución del siguiente programa de mínimo condicionado:

$$\underset{y}{\mathrm{MIN}} \quad \phi = u'u = (y-x)'D'D(y-x) \qquad \text{s.a.} \quad By = Y \tag{3.1}$$

En el programa [3.1] la función objetivo refleja la volatilidad de las discrepancias entre los ritmos de crecimiento intertrimestral del indicador y del agregado.

El operador lagrangiano asociado al programa [3.1] es:

$$\varphi = \phi + 2\lambda'(By - Y) = (y-x)'D'D(y-x) + 2\lambda'(By - Y) \tag{3.2}$$

Las correspondientes condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2D'Dy - 2D'Dx + 2B'\lambda = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2(By - Y) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

La estimación de *y* se obtiene a partir de [3.3] de forma inmediata:

$$\begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'D & B' \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D'Dx \\ Y \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Naturalmente, de [3.4] se deriva la expresión explícita para *y*:

$$y = x + (D'D)^{-1}B'\left[B(D'D)^{-1}B'\right]^{-1}(Y - Bx) = x + A[D,B](Y - X) \tag{3.5}$$

La interpretación de la ecuación [3.5] es muy sencilla: la serie trimestral *y* es el resultado de añadir al indicador *x* un factor de ajuste derivado de la distribución sin indicador de la discrepancia anual entre dicho indicador y la serie anual *Y*. Esta discrepancia anual o residuo es repartida en cada trimestre mediante el método de Boot *et al.* expuesto en la sección anterior.

La estimación de la serie trimestral como suma algebraica de dos elementos, uno vinculado con el indicador y otro asociado a la distribución temporal de un residuo, es común a métodos más sofisticados y permite establecer una interpretación muy intuitiva de los mismos.

En consecuencia, las propiedades dinámicas de *y* están determinadas como una combinación de las de *x* y de las del residuo distribuido. Así, las propiedades de carácter infraanual de *y* están determinadas por las de *x*. En particular, la estacionalidad de la serie trimestralizada es la del indicador igual que otros elementos de alta frecuencia como efectos de calendario, valores atípicos, etc. Asimismo, la falta de homogeneidad y la presencia de revisiones asociadas con el procedimiento de Boot *et al.* se apreciarán aquí también.

Idealmente, si el indicador aproxima adecuadamente al agregado en el dominio observable, los residuos serán pequeños y el primer término de lado derecho de [3.5] dominará. Finalmente, si $x=0$ el método de Denton equivale al de Boot *et al*.

Método de Fernández (1981)

El método propuesto por Denton adolece de dos importantes limitaciones: (a) el indicador *x* ha de estar expresado en las mismas unidades que el agregado *Y* objeto de trimestralización y (b) el número de indicadores ha de ser uno. Ambas limitaciones pueden ser resueltas antes de aplicar el procedimiento de desagregación temporal, transformando la serie *x* de forma que sea cuantitativamente compatible con *Y* o definiendo *x* como un índice sintético, si $p>1$.

No obstante, ambas soluciones son un tanto forzadas y artificiosas en la mayoría de los casos, por lo que Fernández (1981) propone un método de trimestralización que unifica, por una parte, el tratamiento preliminar necesario para hacer compatible indicador y agregado y, por otra, el procedimiento de desagregación temporal sugerido por Denton. El planteamiento formal se expone a continuación.

Sea $x=\{x_{i,t,T} : i=1..p,\ t=1..4,\ T=1..N\}$ una matriz nxp cuyos elementos recogen las observaciones disponibles sobre *p* indicadores de frecuencia trimestral, seleccionados para sustentar la desagregación temporal de *Y*. Ahora $p\geq 1$, pudiendo ser una columna de *x* un vector de unos, con lo que se puede considerar la presencia de un término independiente en la relación entre agregado e indicador.

La estimación trimestral *y* compatible con los totales anuales *Y* se obtiene como solución del siguiente programa de mínimo:

$$\underset{y,\beta}{\mathrm{MIN}} \quad \phi = u'u = (y - x\beta)'D'D(y - x\beta) \qquad \text{s.a.} \quad By = Y \qquad [3.6]$$

Este programa de mínimo es muy similar al planteado por Denton. La principal diferencia está asociada a la inclusión de un nuevo instrumento: un vector β:px1 que recoge la dependencia lineal entre la serie trimestral (inobservable) y los indicadores. Como se verá más adelante, esta generalización del programa de Denton tiene consecuencias muy importantes. Por lo demás, la interpretación de la función objetivo y de las restricciones son muy similares a las ya expuestas al tratar los procedimientos de Boot *et al.* y Denton.

De la forma usual, el operador lagrangiano asociado al programa [3.6] es:

$$\varphi = \phi + 2\lambda'(By - Y) = (y - x\beta)'D'D(y - x\beta) + 2\lambda'(By - Y) \qquad [3.7]$$

Las correspondientes condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2D'Dy - 2D'Dx\beta + 2B'\lambda = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0 \quad\Rightarrow\quad -2x'D'Dy + 2x'D'Dx\beta = 0 \qquad [3.8]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2(By - Y) = 0$$

El sistema [3.8] incorpora *p* ecuaciones asociadas a la inclusión de *b* como nuevo instrumento del programa. La estimación de *y* se obtiene directamente a partir de [3.8]:

$$\begin{bmatrix} y \\ \beta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'D & -D'Dx & B' \\ -x'D'D & x'D'Dx & 0 \\ B & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y \end{bmatrix} \qquad [3.9]$$

La expresión explícita para *y*, derivada de [3.9] es:

$$\hat{y} = x\hat{\beta} + (D'D)^{-1}B'\left[B(D'D)^{-1}B'\right]^{-1}(Y - Bx\hat{\beta}) = x + A[D,B](Y - X\hat{\beta}) \qquad [3.10]$$

De esta última ecuación se obtiene que la serie trimestralizada es el resultado de agregar dos componentes: uno ligado linealmente al indicador y otro derivado de la distribución según Boot *et al.* de la discrepancia anual existente entre el indicador (debidamente escalado) y el agregado.

Igual que el método de Denton, el de Fernández considera que la serie trimestralizada combina las propiedades de *x*, especialmente las de alta frecuencia, distorsionadas por la distribución de un residuo anual.

La inclusión del vector β obliga a considerar de forma separada su estimación:

$$\hat{\beta} = \left[x'B'\left[B(D'D)^{-1}B'\right]Bx\right]^{-1} x'B'\left[B(D'D)^{-1}B'\right]Y \qquad [3.11]$$

La ecuación anterior explica la importancia de la generalización efectuada por Fernández al método de Denton. En primer lugar, la relación entre indicador y agregado está determinada por los propios datos y forma parte del procedimiento de trimestralización, resultando su cuantificación un proceso objetivo. En segundo lugar, esta ecuación pone de manifiesto que la estimación de *b* es del tipo mínimos cuadrados generalizados en un modelo lineal que relaciona el agregado *Y* con los indicadores anualizados *X*:

$$Y = X\beta + U \qquad [3.12]$$

donde la matriz de varianzas y covarianzas de *U* es:

$$V = B(D'D)^{-1}B' \qquad [3.13]$$

Como se verá al exponer el método de Chow y Lin, la forma de dicha matriz de varianzas y covarianzas de *U* se deriva de un modelo trimestral similar a [3.12], con unas innovaciones dotadas de una estructura dinámica particular: un paseo aleatorio.

La inclusión de *b* como instrumento no sólo flexibiliza notablemente el método de Denton sino que permite considerar diversos casos particulares:

i. Si no existe indicador ($x=0$) o su relación con el agregado no es significativa ($\beta=0$) se obtiene la misma estimación que con el Boot *et al*., esto es, una desagregación temporal sin indicador.

ii. Si la relación lineal entre indicador y agregado es estrictamente proporcional ($\beta=1$) este método equivale al de Denton.

iii. Si el residuo anual es nulo ($U=0$) se obtiene una relación exacta entre indicador y agregado. A su vez, si esta relación es estrictamente proporcional ($\beta=1$) se tiene el caso de estimación directa: el nivel del indicador es el nivel del agregado. El caso intermedio ($\beta\neq1$) es propio de un procedimiento de trimestralización semidirecto: los niveles transformados o reponderados de un conjunto de *p* indicadores sirven para formar un índice sintético que permite estimar *y* a partir de *x*.

3.2. Métodos basados en modelos

Los procedimientos de desagregación temporal basados en modelos asumen que la serie trimestral inobservable *y* evoluciona según una estructura estadísticamente explícita que detalla sus propiedades estocásticas de manera completa. A continuación, una vez especificado el modelo, se estiman los parámetros relevantes por máxima verosimilitud o por mínimos cuadrados generalizados. Realizada la estimación se examina la adecuación del modelo a la muestra y, si no existe evidencia que indique falta de conformidad entre ambos, se desarrollan los ejercicios inferenciales usuales: determinación de intervalos de confianza, predicción, etc.

Método de Chow y Lin (1971)

El procedimiento de trimestralización propuesto por Chow y Lin (1971) ha adquirido una extraordinaria difusión debido a los siguientes factores:

1. Es un método muy general que engloba como casos particulares todos los anteriormente expuestos.
2. Al basar sus resultados principales en una regresión entre el agregado anual y el indicador de aproximación coyuntural permite una cuantificación objetiva de la calidad de la trimestralización, al disponer de toda la potencia del análisis de regresión: medidas de ajuste, contrastes de diagnóstico, etc.
3. El punto anterior permite al económetra una difusión rápida de sus resultados entre los analistas de la coyuntura.
4. Por estar basado en un modelo estadístico explícito, constituye el primer paso en la especificación de procedimientos más sofisticados que generalizan dicho modelo trimestral, los métodos de estimación aplicados o ambas cosas.
5. La lógica del modelo es fácilmente aplicable al caso multivariante.

El método de Chow y Lin asume que existe un modelo trimestral que relaciona un vector de *p* indicadores *x* con la serie trimestral inobservable *y*:

$$y = x\beta + u \qquad [3.14]$$

donde *b* es un vector de *p* parámetros constantes pero desconocidos y *u* es una perturbación estocástica de media nula y matriz de varianzas y covarianzas *v*.

Se asume que *y* satisface la restricción longitudinal habitual:

$$Y = By \qquad [3.15]$$

Premultiplicando [3.14] por *B* se obtiene el modelo anual que vincula la serie anual *Y* con el indicador *X* temporalmente agregado. De esta manera, se obtiene un modelo lineal que relaciona variables observables:

$$Y = X\beta + U \qquad [3.16]$$

En general, *U* no será ruido blanco, por lo que la estimación del modelo anterior ha de realizarse por mínimos cuadrados generalizados. Esta es la práctica usual del análisis de la coyuntura cuando se examina la congruencia entre agregados e indicadores y una de las razones antes comentadas que explican la difusión del método de Chow y Lin.

El objetivo del procedimiento de trimestralización de Chow y Lin consiste en definir un estimador lineal para *y* que satisfaga [3.15] (restricción longitudinal) y que sea al mismo tiempo compatible con [3.14] (modelo de comportamiento). Este estimador lineal tiene la forma:

$$\hat{y} = AY \qquad [3.17]$$

La matriz *A* que determina el estimador, se obtiene a partir de dos condiciones: insesgadez y varianza mínima, esto es, se trata de un estimador lineal, insesgado y óptimo[2] (ELIO). Ambas condiciones son esenciales para la determinación de *A* pero cada una juega un papel diferente. Así, el requisito de insesgadez genera la estructura básica del estimador mientras que el de mínima varianza lo precisa. A continuación se exponen ambas con detalle.

- *Insesgadez*

Esta condición implica:

$$E(\hat{y} - y) = 0 \qquad [3.18]$$

Teniendo en cuenta [3.17], [3.16] y que $U = Bu$ se obtiene:

$$AX = x \qquad [3.19]$$

Sustituyendo la anterior ecuación en [3.17] se deriva la ecuación básica del estimador de *y*:

$$\hat{y} = x\beta + AU \qquad [3.20]$$

Esta expresión es similar a las obtenidas con los métodos de Denton y Fernández, siendo su interpretación análoga.

- *Varianza mínima*

Teniendo en cuenta las ecuaciones [3.16] y [3.18], se obtiene la siguiente expresión para la matriz de varianzas y covarianzas del estimador de *y*:

$$\Sigma_{\hat{y}} = AVA' + v - ABv - vB'A' \qquad [3.21]$$

donde *V* es la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación estocástica del modelo anual. Como $U = Bu$ su dependencia con la correspondiente matriz de *u* es:

$$V = BvB' \qquad [3.22]$$

Chow y Lin proponen minimizar la suma de las varianzas de los errores de estimación de cada uno de los trimestres, preservando la condición de insesgadez. Formalmente, se tiene el siguiente programa de mínimo:

[2] En términos de error cuadrático medio mínimo.

$$\underset{A}{MIN} \quad \Phi = \text{traza } (\Sigma_{\hat{y}}) \qquad \text{s.a.} \quad AX = x \qquad [3.23]$$

El correspondiente operador lagrangiano asociado al programa anterior es:

$$\varphi = tr(AVA' + v - ABv - vB'A') - 2tr[M'(AX - x)] \qquad [3.24]$$

donde M:nxp es una matriz de multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de primer orden de un mínimo son:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2AV' - Bv - vB' - 2MX' = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial M} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(AX - x) = 0 \qquad [3.25]$$

De estas expresiones se deduce:

$$A = vB'V^{-1} + MX'V^{-1} \qquad [3.26]$$

Como AX=x se obtiene la siguiente expresión para el multiplicador de Lagrange:

$$M = (X - vB'V^{-1}X)(X'V^{-1}X)^{-1} \qquad [3.27]$$

Sustituyendo [3.27] en [3.26], teniendo en cuenta [3.17] y ordenando términos:

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}Y) \qquad [3.28]$$

Esta expresión indica que la estimación del vector de parámetros se obtiene aplicando el método de los mínimos cuadrados generalizados al modelo anual que relaciona el agregado *Y* con el indicador *X*. Los residuos anuales se definen de la manera habitual como:

$$\hat{U} = Y - X\hat{\beta} \qquad [3.29]$$

Finalmente, la expresión para el estimador ELIO de *y* es:

$$\hat{y} = x\hat{\beta} + vB'V^{-1}\hat{U} = x\hat{\beta} + L\hat{U} \qquad [3.30]$$

La ecuación anterior determina dicho estimador como la agregación de un término relacionado linealmente con el indicador y de un residuo anual trimestralizado. La principal característica del estimador radica en la dependencia del filtro de desagregación temporal *L* de la forma del modelo trimestral y, en particular, de la estructura dinámica de sus perturbaciones. Como se verá más adelante, esta es una de las razones de la flexibilidad y generalidad del método de Chow y Lin.

El ELIO de *y* expresado en [3.30] satisface la restricción longitudinal. En efecto, premultiplicando dicha expresión por *B* se obtiene:

$$B\hat{y} = Bx\hat{\beta} + BvB'V^{-1}\hat{U} = X\hat{\beta} + \hat{U} = Y \qquad [3.31]$$

Como ya se ha comentado, la condición de insesgadez define la estructura del estimador como la suma de un componente linealmente relacionado con el indicador y de un residuo temporalmente desagregado. Esta estructura es común con los métodos de Denton y de Fernández antes expuestos. Por otra parte, el requisito de varianza mínima detalla de forma precisa el mecanismo de trimestralización de los residuos, vinculando dicho mecanismo con las hipótesis realizadas acerca de las perturbaciones estocásticas del modelo trimestral.

Una importante ventaja de este método es que permite obtener intervalos de confianza para las estimaciones trimestrales a partir de la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas:

$$\Sigma_{\hat{y}} = (I_n - LB)v + (x - LX)\Sigma_{\hat{\beta}}(x - LX)' \qquad [3.32]$$

Esta última ecuación establece que la incertidumbre que acompaña a las estimaciones trimestrales está asociada con dos fuentes: una vinculada con la variabilidad de las perturbaciones estocásticas trimestrales *u* y otra asociada con la imprecisión en que se incurre al estimar *b*.

Las expresiones [3.28] a [3.32], que definen el método de Chow y Lin, requieren para su aplicación el conocimiento de la matriz de varianzas y covarianzas *v* de las perturbaciones trimestrales *u*. Se han propuesto diversas especificaciones para dichas perturbaciones. A continuación se exponen las más relevantes.

u ~ ruido blanco (Chow y Lin, 1971)

En este caso:

$$u_t = a_t \quad \forall t \qquad [3.33]$$

siendo a_t un ruido blanco gaussiano:

$$a_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_a^2) \qquad [3.34]$$

En consecuencia:

$$V = BvB' = \sigma_a^2 BB' \qquad [3.35]$$

La aplicación del procedimiento de Chow y Lin resulta inmediata, al no ser preciso estimar parámetro alguno vinculado con *v*.

u ~ I(1) (Fernández, 1981)

La especificación de la perturbación trimestral es:

$$u_t = u_{t-1} + a_t \quad \forall t \qquad [3.36]$$

siendo a_t un ruido blanco gaussiano. La correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación anual es:

$$V = BvB' = \sigma_a^2 B(D'D)^{-1} B' \qquad [3.37]$$

De esta manera las ecuaciones de Chow y Lin coinciden con las obtenidas con el método de Fernández:

$$\hat{y} = x\hat{\beta} + (D'D)^{-1} B' \left[B(D'D)^{-1} B'\right]^{-1} (Y - Bx\hat{\beta}) \qquad [3.10]$$

$$\hat{\beta} = \left[x' B' \left[B(D'D)^{-1} B'\right] Bx\right]^{-1} x' B' \left[B(D'D)^{-1} B'\right] Y \qquad [3.11]$$

En consecuencia, el método de Fernández es un caso particular del de Chow y Lin cuya aplicación es inmediata, igual que bajo la hipótesis de ruido blanco y por las mismas razones. Esta facilidad computacional del método de Fernández le otorga un gran atractivo. Por otra parte, en numerosas situaciones la relación entre el agregado anual *Y* y el indicador *X* no permite identificar una relación de cointegración, por lo que las perturbaciones *U* poseerán una raíz unitaria. Esta situación es compatible con que *u* también posea una raíz unitaria aunque no la implica de forma necesaria, véase Engel (1984).

u ~ AR(1) (Chow y Lin, 1971)

En este caso se asume:

$$u_t = \rho u_{t-1} + a_t \quad |\rho| < 1 \quad \forall t \qquad [3.38]$$

siendo a_t un ruido blanco gaussiano. La matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación anual es ahora:

$$V = BvB' = \frac{\sigma_a^2}{(1-\rho^2)} Bv(\rho)B' \qquad [3.39]$$

siendo:

$$v(\rho) = \left\{\rho^{|i-j|} \quad i,j = 1..n\right\} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad [3.40]$$

Para aplicar el procedimiento de Chow y Lin teniendo en cuenta las dos expresiones anteriores hay que estimar previamente el parámetro r. El tratamiento más general es el propuesto por Bournay y Laroque (1979). Estos autores proponen determinar una malla de valores para r, con, $-1 < \rho < 1$, y determinar los valores de β y σ_a^2 que maximizan la función de verosimiltud del modelo anual, logarítmicamente transformada:

$$\ell(\beta,\sigma_a^2 \mid \overline{\rho}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{1}{2}\ln(\mid Bv(\overline{\rho})B' \mid) - \frac{1}{2\sigma_a^2}(Y - X\beta)'(Bv(\overline{\rho})B')^{-1}(Y - X\beta) \qquad [3.41]$$

Este procedimiento iterativo puede ser computacionalmente complejo por lo que Barbone *et al.* (1981) proponen minimizar la suma ponderada de cuadrados del modelo anual, esto es, el último término de [3.41] cambiado de signo:

$$\phi(\beta,\sigma_a^2 \mid \overline{\rho}) = \frac{1}{2\sigma_a^2}(Y - X\beta)'(Bv(\overline{\rho})B')^{-1}(Y - X\beta) \qquad [3.42]$$

Finalmente, di Fonzo y Filosa (1987) proponen estimar *r* a partir de su contrapartida anual *G* mediante la siguiente función:

$$\Gamma = \frac{\rho(\rho + 1)(\rho + 1)^2}{2(\rho^2 + \rho + 2)} \qquad [3.43]$$

Estimado *G* a partir de la relación anual $Y = X\beta + U$ se determina el valor de *r* a partir de [3.43][3]. Si $0 \leq \Gamma \leq 1$ no hay problema alguno pero en el caso $-0.13 \leq \Gamma < 0$ se obtienen dos soluciones, pudiendo elegirse la de menor valor absoluto como selección apropiada. Si aparece el caso $-1.00 \leq \Gamma < -0.13$ no se obtiene solución, apareciendo un problema de identificación que puede resolverse en la práctica haciendo $\rho = -0.13$ ó $\rho = 0$ aunque esta solución no es teóricamente ortodoxa.

u ~ I(1) markoviano (Litterman, 1983)

Considerando la situación en que se desea mensualizar un agregado trimestral, Litterman (1983) propone una modificación del método de Chow y Lin orientada a flexibilizar la especificación de la perturbación del modelo mensual. En particular, Litterman considera que u_t sigue un proceso I(1) cuya innovación es a su vez un AR(1) estacionario. Formalmente:

$$\left.\begin{array}{r} u_t = u_{t-1} + \zeta_t \\ \zeta_t = \mu\zeta_{t-1} + a_t \quad \mid \mu \mid < 1 \end{array}\right\} \quad \forall t \qquad [3.44]$$

En consecuencia, u_t evoluciona según un proceso AR(2) con una raíz unitaria y, si *m* se aproxima a la unidad, se comporta prácticamente como un proceso I(2). De esta manera, la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación anual es:

$$V = BvB' = \sigma_a^2 B(D'H'HD)^{-1}B' \qquad [3.45]$$

siendo H:nxn una matriz dependiente de *m* según:

[3] Esta estimación se puede realizar fácilmente mediante el procedimiento de Cochrane y Orcutt.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -\mu & 1 \end{bmatrix} \quad [3.46]$$

En el método de Litterman el parámetro m plantea problemas similares a los que ocasiona el parámetro r en el de Chow y Lin, con el inconveniente añadido de que la estructura matricial de V es más compleja. Una posibilidad consiste en estimar m por máxima verosimiltud, utilizando un algoritmo similar al de Bournay y Laroque antes expuesto, véase di Fonzo (1987) para una exposición detallada.

4. **DESAGREGACIÓN TEMPORAL Y CONCILIACIÓN: MÉTODOS MULTIVARIANTES**

Uno de los desarrollos más importantes de los métodos de desagregación temporal de series económicas examinados hasta ahora consiste en su extensión al caso multivariante. Esta extensión permite la inclusión de restricciones de naturaleza transversal como las que aparecen en los problemas de conciliación propios de las cuentas nacionales. Esta clase de problemas hacen referencia a la consistencia cuantitativa que se impone a las estimaciones de un mismo período de tiempo como, por ejemplo, que la descomposición del Producto Interior Bruto (PIB) desde la óptica de la demanda iguale a la que se obtiene desde la perspectiva de la oferta.

Naturalmente, el problema de la conciliación es de naturaleza transversal y, por lo tanto, estática. Existen diversas soluciones para este problema como las propuestas por Uriel (1974) y van der Ploeg (1982), entre otras[4]. La consideración simultánea de ambas restricciones obliga a plantear el problema en un marco multivariante explícito. En dicho marco se encuentran los métodos propuestos por Rossi (1982) y di Fonzo (1987, 1990, 1994). A continuación se expone este último.

Sea $Y = \{Y_{j,T} : j=1..M,\ T=1..N\}$ un conjunto de M series que se desea trimestralizar y que han de estar, cada trimestre, conciliadas. En consecuencia, las estimaciones trimestrales $y = \{y_{j,t,T} : j=1..M,\ t=1..4,\ T=1..N\}$ han de satisfacer dos restricciones, una longitudinal:

$$By_j = Y_j \quad \forall j \quad [4.1]$$

[4] En el Apéndice A se expone este último método

y otra transversal:

$$\sum_{j=1}^{M} y_j = z \qquad [4.2]$$

siendo z:nx1 una serie trimestral dada y, en consecuencia, observable.

Nótese que, en el método de di Fonzo, *z* es parte del conjunto de información disponible. No es, por tanto, objeto de estimación o, si se prefiere, no es parte del problema sino de la solución. Naturalmente, la pregunta "¿de dónde proviene *z*?" surge de manera inmediata. La respuesta más apropiada depende del contexto. Así, por ejemplo, si las Y_j son agregados con una dimensión regional, entonces *z* puede ser el correspondiente total nacional observado trimestralmente. En otras situaciones, *z* puede ser igual a la suma de parte de los agregados Y_j previamente trimestralizados de forma uniecuacional. La estructura formal del problema se aprecia en la siguiente tabla:

Tabla 1: Estimación trimestral con restricción transversal

		Series				Total
Año	Trimestre	y_1	Y_1	y_2	Y_2	z
	1	$y_{1,1,1}$		$y_{2,1,1}$		$\mathbf{z_{1,1}}$
	2	$y_{1,2,1}$		$y_{2,2,1}$		$\mathbf{z_{2,1}}$
	3	$y_{1,3,1}$		$y_{2,3,1}$		$\mathbf{z_{3,1}}$
	4	$y_{1,4,1}$		$y_{2,4,1}$		$\mathbf{z_{4,1}}$
1			$\mathbf{Y_{1,1}}$		$\mathbf{Y_{2,1}}$	
	1	$y_{1,1,2}$		$y_{2,1,2}$		$\mathbf{z_{1,2}}$
	2	$y_{1,2,2}$		$y_{2,2,2}$		$\mathbf{z_{2,2}}$
	3	$y_{1,3,2}$		$y_{2,3,2}$		$\mathbf{z_{3,2}}$
	4	$y_{1,4,2}$		$y_{2,4,2}$		$\mathbf{z_{4,2}}$
2			$\mathbf{Y_{1,2}}$		$\mathbf{Y_{2,2}}$	

Los valores que aparecen en esta tabla son de dos tipos: los que están en **negrita** representan datos del problema (4 totales anuales y 8 totales trimestrales) mientras que los que están *en cursiva* reflejan las estimaciones que han de realizarse (16 datos trimestrales).

Expresando las restricciones [4.1] y [4.2] en notación matricial se tiene, respectivamente:

$$(I_M \otimes B)y = Y \qquad [4.3]$$

y

$$(i_M^{'} \otimes I_n)y = z \qquad [4.4]$$

En consecuencia, las *NM* restricciones longitudinales y las *n* restricciones transversales que operan sobre el vector de estimaciones trimestrales dan lugar a la siguiente expresión:

$$Hy = Y_e \qquad [4.5]$$

siendo:

$$H = \begin{bmatrix} i_M^{'} \otimes I_n \\ I_M \otimes B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_e = \begin{bmatrix} z \\ Y \end{bmatrix} \qquad [4.6]$$

Una vez que las restricciones en presencia han sido planteadas, se formula un modelo que relaciona agregados e indicadores en la frecuencia trimestral. Este modelo tiene la misma expresión que el empleado en el método de Chow y Lin:

$$y_j = x_j\beta_j + u_j \qquad j = 1..M \qquad [4.7]$$

siendo y_j el agregado trimestral inobservable, x_j una matriz nxp_j de indicadores, β_j es un vector de parámetros constantes y desconocidos y u_j denota las perturbaciones estocásticas que distorsionan la relación lineal entre indicadores y serie trimestral. Se asume que dichas perturbaciones son de media nula y de matriz de varianzas y covarianzas v_{jj}. En general, se admite que las innovaciones de ecuaciones distintas puedan estar contemporáneamente correlacionadas:

$$E(u_i u_j^{'}) = v_{i,j} \qquad \forall i, j = 1..M \qquad [4.8]$$

De esta manera, el modelo adopta una expresión formalmente similar a la de un sistema de ecuaciones de regresión aparentemente no relacionadas (*seemingly unrelated regression equations, SURE*):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_M \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_M \end{bmatrix}}_{x} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_M \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_M \end{bmatrix}}_{u} \qquad [4.9]$$

El modelo anterior es muy similar al utilizado en el procedimiento de Chow y Lin. Por lo tanto, la aplicación al mismo de la matriz *H* de restricciones longitudinales y transversales da lugar a la siguiente versión observable:

$$Y_e = X_e\beta + U_e \qquad [4.10]$$

Aplicando los mismos principios ya expuestos de estimación lineal, insesgada y óptima (ELIO) a *y* se obtiene:

$$\hat{y} = x\hat{\beta} + L(Y_e - X_e\hat{\beta}) \qquad [4.11]$$

siendo β la estimación por mínimos cuadrados generalizados en un contexto SURE:

$$\hat{\beta} = (X_e^{'}V_e^{\neg}X_e)^{-1}(X_e^{'}V_e^{\neg}Y_e) \qquad [4.12]$$

y *L* es el filtro de distribución del residuo anual:

$$L = vH'V_e^{\neg} \qquad [4.13]$$

La interpretación de los resultados es, en lo esencial, la misma que la efectuada al examinar los resultados de Chow y Lin. Sólo existe una consideración técnica específica derivada de la naturaleza de la matriz de restricciones *H*. Como dicha matriz es rectangular con dimensión (n+NM)x(nM), no es de rango máximo y su inversión requiere el uso de una matriz inversa generalizada como, por ejemplo, la de Moore-Penrose:

$$H^{\neg} = (H'H)^{-1}H' \qquad [4.14]$$

Por otra parte, los problemas que aquejan al método de Chow y Lin relacionados con la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones trimestrales están exacerbadas en el procedimiento de di Fonzo, debido al notable incremento en la dimensión del problema. En consecuencia, en las aplicaciones prácticas se aplica preferentemente el uso de la hipótesis de Fernández, debidamente modificada para el caso multivariante:

$$V_e = H\left[\Sigma \otimes (D'D)^{-1}\right]H' \qquad [4.15]$$

siendo Σ una matriz MxM que recoge las varianzas y covarianzas contemporáneas de las *M* perturbaciones del modelo [4.10].

5. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

En este apartado concluye el recorrido por los principales métodos de desagregación temporal de series económicas. Como se habrá podido observar, la exposición ha seguido un hilo conductor que lleva desde el caso más sencillo (trimestralización sin indicadores) al más complejo (desagregación temporal con indicadores mediante modelos multiecuacionales). Algunas consideraciones específicas deben ser resaltadas:

1. En todos los métodos considerados se utilizan filtros lineales cuyos coeficientes varían con el tiempo, de forma que el filtro que se utiliza en los extremos de la serie no es el mismo que el que se aplica en el tramo central.

Esta dependencia temporal del filtro genera inhomogeneidades y revisiones en la serie trimestral.

2. La distinción entre los métodos de ajuste y los basados en modelos no es una separación infranqueable. Ambos enfoques han de realizar hipótesis relativamente fuertes acerca de la serie trimestral inobservable. Los primeros lo hacen indirectamente al plantear qué medida de volatilidad se desea minimizar y, los segundos, al definir qué estructura gobierna las propiedades estocásticas de dicha serie.
3. En todos los métodos basados en indicadores, la estimación de la serie trimestral se genera a partir de la suma algebraica de dos elementos, uno vinculado con el indicador y otro asociado con la distribución temporal de un residuo. En consecuencia, las propiedades dinámicas de la serie trimestralizada son una combinación de las de los indicadores y de las del residuo anual distribuido. Así, sus propiedades de carácter infraanual están determinadas por las del indicador. En particular, la estacionalidad de la serie trimestralizada es la del indicador igual que otros elementos de alta frecuencia como efectos de calendario, valores atípicos, etc.
4. El procedimiento de trimestralización propuesto por Chow y Lin (1971) ha adquirido una extraordinaria difusión debido a su generalidad, recurso a métodos de regresión sobradamente conocidos y de gran utilidad, consistencia con la práctica usual del análisis de la coyuntura, empleo de un modelo estadístico explícito y facilidad de generalización al caso multivariante.
5. Frecuentemente, el método de Fernández, que es un caso límite del de Chow y Lin, resulta un procedimiento computacionalmente conveniente y compatible con la relación estimada entre agregado e indicadores en la frecuencia anual.

Existen múltiples líneas de desarrollo en este campo del análisis de series temporales. En primer lugar, el planteamiento del problema de la desagregación temporal mediante su representación en el espacio de los estados y el uso del filtro de Kalman permite la generalización de los métodos aquí expuestos junto con un enfoque computacionalmente más eficiente, véase Gómez y Maravall (1994), Pavía (1997) y las referencias ahí citadas.

Una segunda línea de desarrollo consiste en analizar las propiedades en el dominio de la frecuencia de los métodos de desagregación temporal, con el fin de diseñar procedimientos y filtros cuyas propiedades sean óptimas en un sentido frecuencial bien definido. Melis (1992) es un buen ejemplo de este planteamiento.

Un tercer enfoque consistiría en incorporar en el procedimiento de desagregación multivariante de di Fonzo la variedad de restricciones transversales que permite el método de conciliación de van der Ploeg. Sin duda, la posibilidad de dotar de riqueza transversal a los métodos de trimestralización los haría mucho más atractivos, especialmente en el campo de las Cuentas Nacionales.

Por último, la consideración de los desarrollos de la teoría de la cointegración podrían resultar útiles en la selección del método de trimestralización más apropiado, véase una aplicación en Quilis (1998).

No obstante, siempre debe recordarse que el uso de métodos más complejos o de modelos más sofisticados y generales no conduce, de forma necesaria, a mejores resultados. En las situaciones prácticas de trimestralización, la longitud de la series, la disponibilidad de buenos indicadores y la calidad de la información disponible juegan un papel muy importante, de manera que técnicas muy sofisticadas pueden resultar poco adecuadas. En este sentido, la experiencia en otros campos de la práctica económica es similar y muy ilustrativa, como esta cita de Derman pone de relieve:

If your foundation is an opinion, and therefore necessarily vague, don't build a house of cards on it. New quants on Wall Street often are amazed at the naïveté of Black-Scholes, and inmediately try to do better by adding jumps, stochastic volatility, correlations, transaction costs, etc. But traders are limited humans and data is sparse, so this extra complexity doesn't necessarily improve things. A usable model has to provide both input and a way of speaking that comes naturally. Of course, as time goes by, people can and do get more sophisticated, layer by layer, with new theories spawning new strategies which then spawn even new models.

Derman (2000)

APÉNDICE A: Métodos de conciliación transversal

A continuación se expone de forma sumaria el método de conciliación transversal propuesto por van der Ploeg (1982). Sea *Y* un vector que representa las estimaciones de *M* variables, cuya distribución es:

$$Y \sim N(\mu, \Sigma) \qquad [A.1]$$

Se asume que las estimaciones conciliadas *Z* han de satisfacer *h* restricciones lineales de la forma:

$$A\,Z = 0 \qquad [A.2]$$

donde A: hxM representa de forma general dichas restricciones. Así, por ejemplo, *A* puede recoger que determinados componentes de *Z* sean iguales entre sí o que la suma de un subconjunto de variables iguale a la de otro subconjunto.

En el método de van der Ploeg se propone la determinación de *Z* como solución del siguiente programa de optimización condicionada:

$$\underset{Z}{\mathrm{MIN}} \quad \phi = (Z - Y)'\Sigma^{-1}(Z - Y) \qquad \text{s.a.} \quad AZ = 0 \qquad [A.3]$$

La función objetivo pondera las desviaciones cuadráticas de cada estimación no conciliada respecto a su versión conciliada de forma inversa al error con que se estiman. Estos pesos tienen también en cuenta la estructura de covariación de dichos errores.

El operador lagrangiano vinculado con [A.3] es:

$$\varphi = (Z - Y)'\Sigma^{-1}(Z - Y) - 2\lambda AZ \qquad [A.4]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial Z} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Sigma^{-1}Z - \Sigma^{-1}Y - A'\lambda = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0 \quad &\Rightarrow \quad AZ = 0 \end{aligned} \qquad [A.5]$$

De [A.5] se obtiene:

$$Z = Y + \Sigma A'\lambda \qquad [A.6]$$

Premultiplicando esta expresión por *A*, despejando *l* y sustituyendo el resultado en [A.6] se obtiene la solución final:

$$Z = Y - \Sigma A'\left[A\Sigma A'\right]^{-1}AY \qquad [A.7]$$

La interpretación de esta ecuación es inmediata: el vector de variables conciliadas es el resultado de ajustar las estimaciones preliminares (Y) en función de la discrepancia observada (AY), teniendo en cuenta la estructura de varianzas y covarianzas de las estimaciones preliminares.

Este procedimiento posee algunas propiedades interesantes, del tipo *ceteris paribus*:

1. La magnitud de las revisiones, en valor absoluto, es tanto mayor cuanto mayor es la varianza de la estimación inicial (σ_{ii}), esto es, cuanto mayor es la incertidumbre que rodea a la estimación inicial mayor es la cuantía de la modificación a que puede verse sujeta.
2. Si se considera que una determinada estimación preliminar se conoce con exactitud absoluta ($\sigma_{ii}=0$), entonces no se realiza ajuste alguno: $z_i=y_i$.
3. Si la incertidumbre en la estimación de dos variables evoluciona en el mismo sentido ($\sigma_{ij}>0$), sus revisiones también se registrarán en dicho sentido: las dos al alza o las dos a la baja. Si, por el contrario, su covariación es negativa los ajustes se realizarán en sentidos opuestos: una al alza y la otra a la baja o viceversa.

Obsérvese que, dada la forma de la solución [A.7], el conocimiento de la matriz de varianzas y covarianzas de las estimaciones preliminares (Σ) es un elemento crucial. Por el contrario, su valor esperado (μ) no juega papel alguno. Habitualmente, Σ no es conocida por lo que ha de ser estimada, usualmente en dos etapas: (a) estimación de las varianzas y (b) estimación de las covarianzas.

La estimación de las varianzas puede realizarse al mismo tiempo que la preliminar, por ejemplo, acompañando la estimación puntual preliminar de un intervalo de confianza o a partir de la varianza de las revisiones históricas.

Las covarianzas son, por su naturaleza, más difíciles de estimar. Usualmente se recurre a algún procedimiento indirecto basado en las correlaciones históricas entre las variables. En ese caso, una vez estimadas las varianzas, se derivan las covarianzas mediante la expresión siguiente:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}} \qquad \text{[A.8]}$$

Estos problemas de estimación son muy similares a los que aparecen en el campo de los modelos de selección de carteras óptimas de la teoría de finanzas, véase Litterman y Winkelmann (1998) para una exposición detallada.

Asimismo, debe destacarse la similitud existente entre esta solución y la que ofrece el método de Denton, de forma que aunque el problema de conciliación es de naturaleza transversal mientras que el de trimestralización es longitudinal, la manera de resolverlo es común y se obtiene a partir de la suma de una estimación inicial que no respeta las restricciones y de una distribución de la discrepancia o residuo.

REFERENCIAS

Barbone, L., Bodo, G. y Visco, J. (1981) "Costi e profitti in senso stretto", *Bolletino della Banca d'Italia*, n. 36, p. 465-510.

Boot, J.C.G., Feibes, W. y Lisman, J.H.C. (1967) "Further methods of derivation of quarterly figures from annual data", *Applied Statistics*, vol. 16, n. 1, p. 65-75.

Bournay, J. y Laroque, G. (1979) "Réflexions sur la méthode d'elaboration des comptes trimestriels", *Annales de l'INSEE*, n. 36, p. 3-30.

Chow, G. y Lin, A.L. (1971) "Best linear unbiased distribution and extrapolation of economic time series by related series", *Review of Economic and Statistics*, vol. 53, n. 4, p. 372-375.

Denton, F.T. (1971) "Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: an approach based on quadratic minimization", *Journal of the American Statistical Society*, vol. 66, n. 333, p. 99-102.

Derman, E. (2000) "A guide to the perplexed quant", Goldman Sachs & Co., mimeo.

di Fonzo, T. (1987) "La stima indiretta di serie economiche trimestrali", Cleup Editore, Padua, Italia.

— (1990) "The estimation of M disaggregate time series when contemporaneous and temporal aggregates are known", *Review of Economic and Statistics*, vol. 72, p. 178-182.

— (1994) "Temporal disaggregation of a system of time series when the aggregate is known", INSEE-Eurostat Workshop on Quarterly National Accounts, París, diciembre.

di Fonzo, T. y Filosa, R. (1987) "Methods of estimation of quarterly national account series: a comparison", Journee franco-italienne de comptabilite nationale, Lausana, mayo.

Engel, E.M.R.A. (1984) "A unified approach to the study of sums, products, time aggregations and other functions of arma processes", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 5, n. 3, p. 159-171.

Fernández, R.B. (1981) "Methodological note on the estimation of time series", *Review of Economic and Statistics*, vol. 63, n. 3, p. 471-478.

Gómez, V. y Maravall, A. (1994) "Estimation, prediction and interpolation for non-stationary time series with the Kalman filter", *Journal of the American Statistical Society*, vol. 89, n. 426, p. 611-624.

INE (1993) *Contabilidad Nacional Trimestral de España. Metodología y serie trimestral 1970-1992*, Instituto Nacional de Estadística, Madrid, España.

Litterman, R.B. (1983) "A Random Walk, Markov Model for the Distribution of Time Series", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 1, n. 2, p. 169-173.

Litterman, R.B. y Winkelmann, K. (1998) "Estimating covariance matrices", Goldman Sachs & Co., Risk Management Series.

Melis, F. (1986) "Apuntes de series temporales", INE, Documento Interno.

— (1992) "Agregación temporal y solapamiento o 'aliasing'", *Estadística Española*, n. 130, p. 309-346.

Pavía, J.M. (1997) "Trimestralización de series anuales", Universidad de Valencia, Tesis Doctoral.

Quilis, E.M. (1998) "Trimestralización de la inversión en bienes de equipo: series brutas, desestacionalizadas y de ciclo-tendencia", INE, Documento Interno.

Rossi, N. (1982) "A note on the estimation of disaggregate time series when the aggregate is known", *Review of Economics and Statistics*, vol. 64, n. 4, p. 695-696.

Sanz, R. (1982) "Métodos de desagregación temporal de series económicas", Banco de España, Estudios Económicos, n. 22.

Stram, D.O. y Wei, W.W.S. (1986) "A methodological note on the disaggregation of time series totals", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 7, n. 4, p. 293-302.

Uriel, E. (1974) "Método para realizar con información parcial la previsión del cuadro macroeconómico", *Estadística Española*, enero-junio, p. 37-50.

van der Ploeg, F. (1982) "Realiability and the adjustment of large economic accounting matrices", *Journal of the Royal Statistical Society*, series A, vol. 145, part 2, p. 169-194.

NORMAS DE PUBLICACIÓN DE PAPELES DE TRABAJO DEL INSTITUTO DE ESTUDIOS FISCALES

Esta colección de *Papeles de Trabajo* tiene como objetivo ofrecer un vehículo de expresión a todas aquellas personas interasadas en los temas de Economía Pública. Las normas para la presentación y selección de originales son las siguientes:

1. Todos los originales que se presenten estarán sometidos a evaluación y podrán ser directamente aceptados para su publicación, aceptados sujetos a revisión, o rechazados.

2. Los trabajos deberán enviarse por duplicado a la Subdirección de Estudios Tributarios. Instituto de Estudios Fiscales. Avda. Cardenal Herrera Oria, 378. 28035 Madrid.

3. La extensión máxima de texto escrito, incluidos apéndices y referencias bibliográfícas será de 7000 palabras.

4. Los originales deberán presentarse mecanografiados a doble espacio. En la primera página deberá aparecer el título del trabajo, el nombre del autor(es) y la institución a la que pertenece, así como su dirección postal y electrónica. Además, en la primera página aparecerá también un abstract de no más de 125 palabras, los códigos JEL y las palabras clave.

5. Los epígrafes irán numerados secuencialmente siguiendo la numeración arábiga. Las notas al texto irán numeradas correlativamente y aparecerán al pie de la correspondiente página. Las fórmulas matemáticas se numerarán secuencialmente ajustadas al margen derecho de las mismas. La bibliografía aparecerá al final del trabajo, bajo la inscripción "Referencias" por orden alfabético de autores y, en cada una, ajustándose al siguiente orden: autor(es), año de publicación (distinguiendo a, b, c si hay varias correspondientes al mismo autor(es) y año), título del artículo o libro, título de la revista en cursiva, número de la revista y páginas.

6. En caso de que aparezcan tablas y gráficos, éstos podrán incorporarse directamente al texto o, alternativamente, presentarse todos juntos y debidamente numerados al final del trabajo, antes de la bibliografía.

7. En cualquier caso, se deberá adjuntar un disquete con el trabajo en formato word. Siempre que el documento presente tablas y/o gráficos, éstos deberán aparecer en ficheros independientes. Asimismo, en caso de que los gráficos procedan de tablas creadas en excel, estas deberán incorporarse en el disquete debidamente identificadas.

Junto al original del Papel de Trabajo se entregará también un resumen de un máximo de dos folios que contenga las principales implicaciones de política económica que se deriven de la investigación realizada.

PUBLISHING GUIDELINES OF WORKING PAPERS AT THE INSTITUTE FOR FISCAL STUDIES

This serie of *Papeles de Trabajo* (working papers) aims to provide those having an interest in Public Economics with a vehicle to publicize their ideas. The rules governing submission and selection of papers are the following:

1. The manuscripts submitted will all be assessed and may be directly accepted for publication, accepted with subjections for revision or rejected.

2. The papers shall be sent in duplicate to Subdirección General de Estudios Tributarios (The Deputy Direction of Tax Studies), Instituto de Estudios Fiscales (Institute for Fiscal Studies), Avenida del Cardenal Herrera Oria, nº 378, Madrid 28035.

3. The maximum length of the text including appendices and bibliography will be no more than 7000 words.

4. The originals should be double spaced. The first page of the manuscript should contain the following information: (1) the title; (2) the name and the institutional affiliation of the author(s); (3) an abstract of no more than 125 words; (4) JEL codes and keywords; (5) the postal and e-mail address of the corresponding author.

5. Sections will be numbered in sequence with arabic numerals. Footnotes will be numbered correlatively and will appear at the foot of the corresponding page. Mathematical formulae will be numbered on the right margin of the page in sequence. Bibliographical references will appear at the end of the paper under the heading "References" in alphabetical order of authors. Each reference will have to include in this order the following terms of references: author(s), publishing date (with an a, b or c in case there are several references to the same author(s) and year), title of the article or book, name of the journal in italics, number of the issue and pages.

6. If tables and graphs are necessary, they may be included directly in the text or alternatively presented altogether and duly numbered at the end of the paper, before the bibliography.

7. In any case, a floppy disk will be enclosed in Word format. Whenever the document provides tables and/or graphs, they must be contained in separate files. Furthermore, if graphs are drawn from tables within the Excell package, these must be included in the floppy disk and duly identified.

Together with the original copy of the working paper a brief two-page summary highlighting the main policy implications derived from the research is also requested.

ÚLTIMOS PAPELES DE TRABAJO EDITADOS POR EL

INSTITUTO DE ESTUDIOS FISCALES

2000

1/00 Crédito fiscal a la inversión en el impuesto de sociedades y neutralidad impositiva: Más evidencia para un viejo debate.
Autor: Desiderio Romero Jordán.

Páginas: 40.

2/00 Estudio del consumo familiar de bienes y servicios públicos a partir de la encuesta de presupuestos familiares.
Autores: Ernesto Carrilllo y Manuel Tamayo.

Páginas: 40.

3/00 Evidencia empírica de la convergencia real.
Autores: Lorenzo Escot y Miguel Ángel Galindo.

Páginas: 58.

Nueva Época

4/00 The effects of human capital depreciation on experience-earnings profiles: Evidence salaried spanish men.
Autores: M. Arrazola, J. de Hevia, M. Risueño y J. F. Sanz.

Páginas: 24.

5/00 Las ayudas fiscales a la adquisición de inmuebles residenciales en la nueva Ley del IRPF: Un análisis comparado a través del concepto de coste de uso.
Autor: José Félix Sanz Sanz.

Páginas: 44.

6/00 Las medidas fiscales de estímulo del ahorro contenidas en el Real Decreto-Ley 3/2000: análisis de sus efectos a través del tipo marginal efectivo.
Autores: José Manuel González Páramo y Nuria Badenes Pla.

Páginas: 28

7/00 Análisis de las ganancias de bienestar asociadas a los efectos de la Reforma del IRPF sobre la oferta laboral de la familia española.
Autores: Juan Prieto Rodríguez y Santiago Álvarez García.

Páginas 32.

8/00 Un marco para la discusión de los efectos de la política impositiva sobre los precios y el *stock* de vivienda.
Autor: Miguel-Ángel López García.

Páginas 36.

9/00 Descomposición de los efectos redistributivos de la Reforma del IRPF.
Autores: Jorge Onrubia Fernández y María del Carmen Rodado Ruiz.

Páginas 24.

10/00 Aspectos teóricos de la convergencia real, integración y política fiscal.
Autores: Lorenzo Escot y Miguel-Ángel Galindo.

Páginas 28.